グラフとネットワーク 第 8 回
最大流：モデル化 (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 6 月 15 日

最終更新：2015 年 6 月 11 日　22:23

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)

* みどりの日で休み (5/4)

4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)

- 中間試験 (6/8)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10 彩色：数理 (6/29)
11 彩色：モデル化 (7/6)
12 平面グラフ：数理 (7/13)
* 海の日で休み (7/20)
13 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14 予備日 (講義は行う) (8/3)
- 期末試験 (8/10？)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

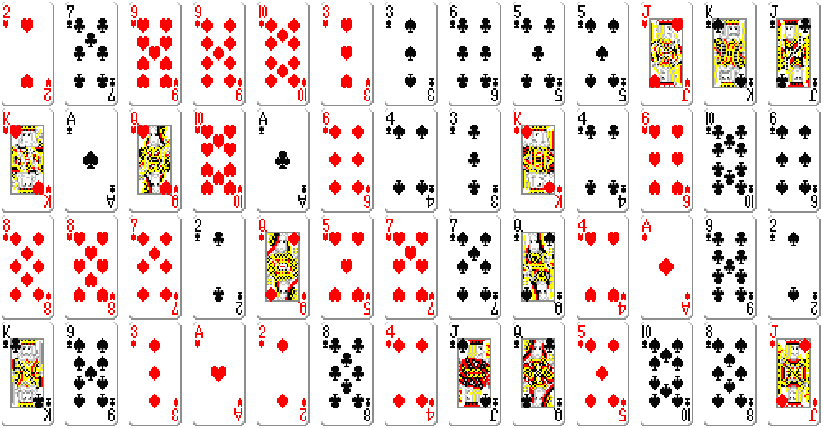
以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

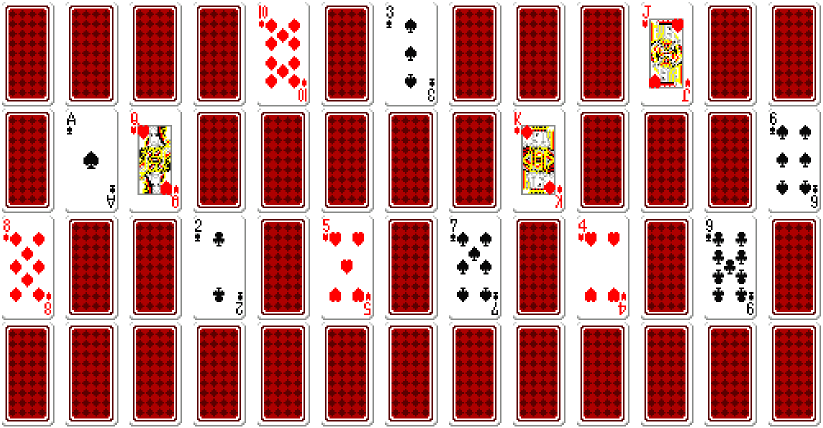
今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて，
  二部グラフにおける，最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を証明できる
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明できる
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決できる

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



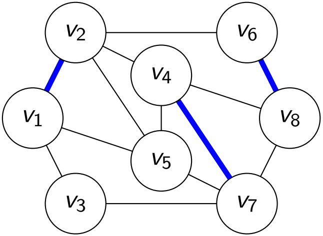
目次

グラフにおけるマッチング

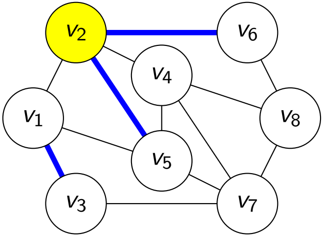
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で,
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

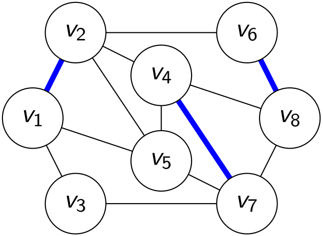
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大マッチング

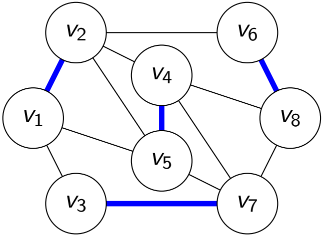
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



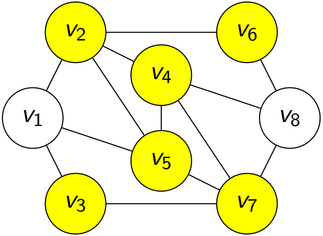
最大マッチングである

頂点被覆

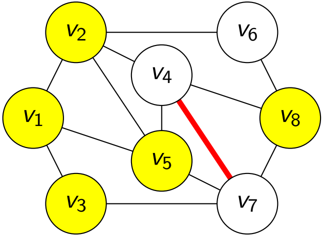
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

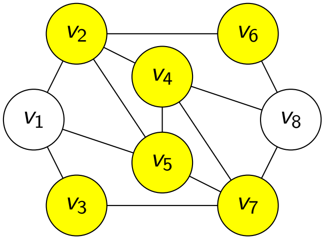
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

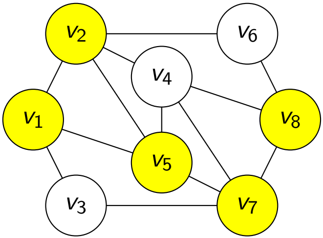
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

マッチングと頂点被覆の関係：帰結 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

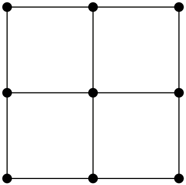
M が G の最大マッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

M が G の最大マッチング
C が G の最小頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

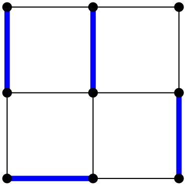
頂点被覆の重要性 (復習)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



頂点被覆の重要性 (復習)

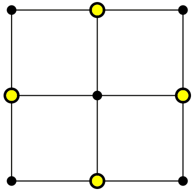
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 $\geq$ 4

頂点被覆の重要性 (続き) (復習)

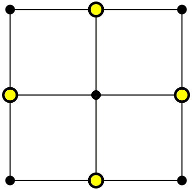
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆

頂点被覆の重要性 (続き)　(復習)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

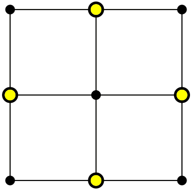


これは頂点被覆なので,

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 4$$

頂点被覆の重要性 (続き) (復習)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，

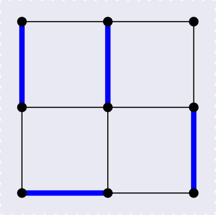
$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 4$$

- したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$ である!!!

頂点被覆の重要性：今一度 (復習)

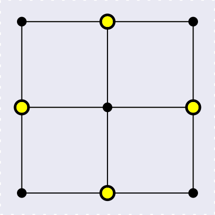
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

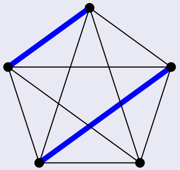
頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が保証される

頂点被覆の重要性：注意

注意

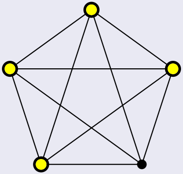
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 2

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

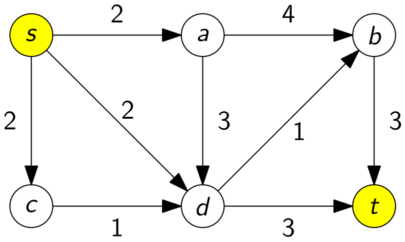
しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

最大流問題とは？

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$ (弧の容量は非負実数)

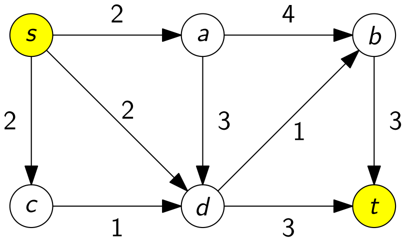


最大流問題とは？

最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの (s から t へ至る最大流)



流れとは？ (1)

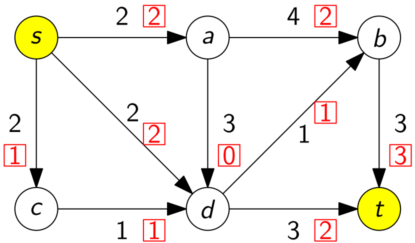
s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，　(流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量)　(v から流出する総量)



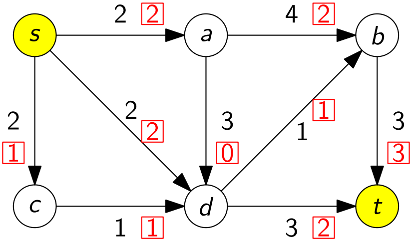
流れとは？ (2)

s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において， (容量制約)

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

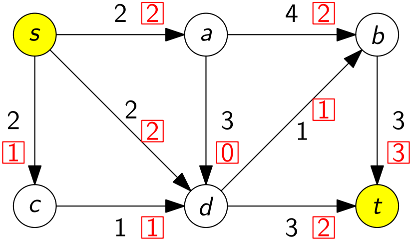


流れの値

流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し，$\mathtt{val}(f)$ と表記する

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

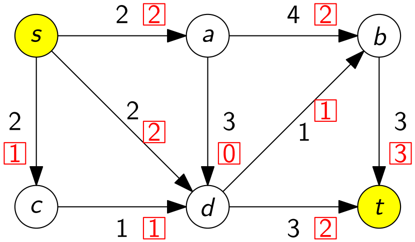


この流れの値は 5

最大流

最大流とは？

s から t へ至る流れ f が**最大流**であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \leq \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと

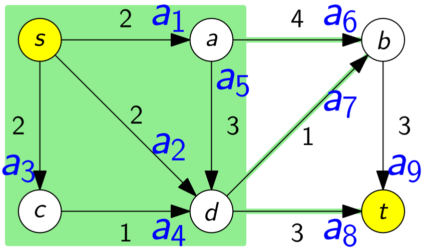


注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

カット

s, t カットとは？

s, t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



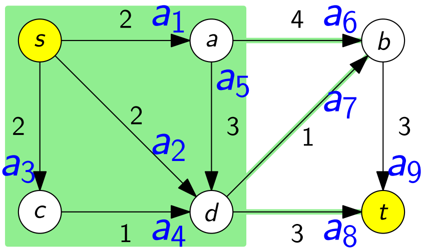
イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

s, t カットの容量とは？

s, t カット S の容量とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v))$$

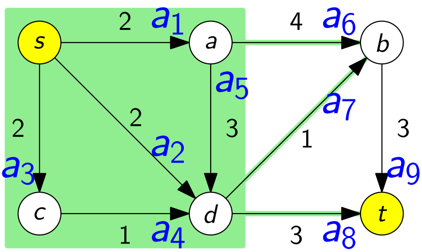


S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

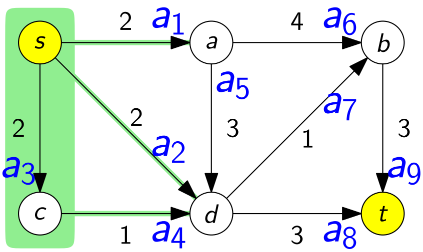
最小カット

最小 s,t カットとは？

最小 s,t カットとは，s,t カット S で，
任意の s,t カット S' に対して，$\mathrm{cap}(S) \le \mathrm{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s,t カットではない



最小 s,t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G=(V,A)$，容量 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s,t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f)\le \mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

f が最大流
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

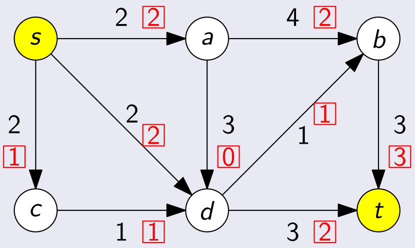
f が最大流
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
S が最小 s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

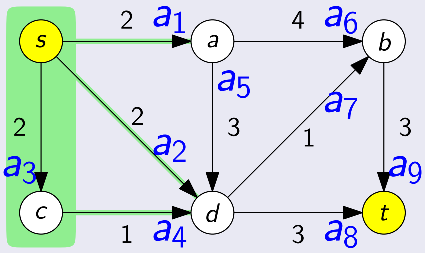
弱双対性の使い方

下界



最大流の値 ≥ 5

上界



最大流の値 ≤ 5

したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある s, t カットは最小 s, t カットであり，その容量は 5

最大流最小カット定理 と 整数流定理

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
S が最小 s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

注意

弱双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば f は最大流

強双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

整数流定理 (重要)

容量が整数 $\Rightarrow$ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

双対性：ここまでのまとめ

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (不成立の場合も)

最大マッチングの辺数 $\stackrel{?}{=}$ 最小頂点被覆の頂点数

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大流の値 $\leq$ 最小 s, t カットの容量

強双対性 (成立)

最大流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量

加えて，整数流定理

双対性：今日の内容

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (二部グラフでは成立)

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

Kőnig–Egerváry の定理

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大流の値 $\leq$ 最小 s,t カットの容量

強双対性 (成立)

最大流の値 $=$ 最小 s,t カットの容量

加えて，整数流定理

D. Kőnig と J. Egerváry

Dénes Kőnig
ケーニグ
(1894–1944)

Jenő Egerváry
エゲルヴァーリ
(1891–1958)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

http://www.cs.elte.hu/egres/www/intro.html

目次

二部グラフ (復習)

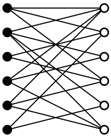
無向グラフ $G = (V, E)$

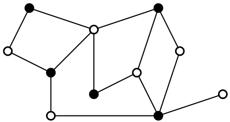
二部グラフとは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在するとき，G は二部グラフと呼ばれる

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ ならば，$\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例





このとき，A と B を G の部集合と呼ぶ

二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理

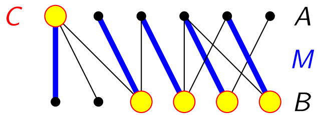
二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

例：$|M| = |C| = 5$



Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針

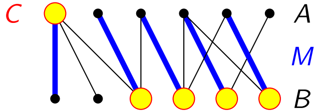
任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

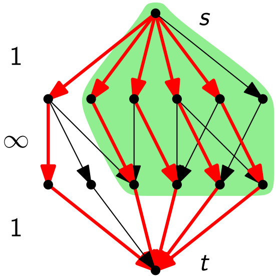
1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える ($V' = V \cup \{s, t\}$)
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)

$$\begin{array}{lcl} G \text{ の最大マッチング} & \leftrightarrow & G' \text{ の最大流} \\ G \text{ の最小頂点被覆} & \leftrightarrow & G' \text{ の最小 } s, t \text{ カット} \end{array}$$

3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，

$$\text{最大マッチングの辺数} = \text{最小頂点被覆の頂点数}$$



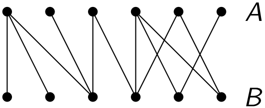


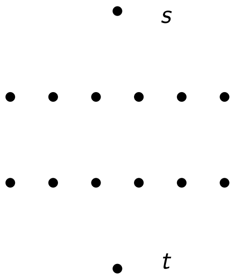
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{s, t\}, \\
A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\
&\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}
\end{aligned}
$$



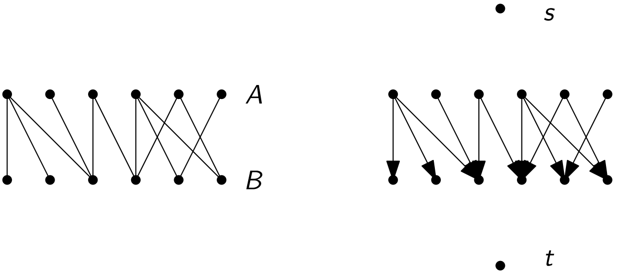


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{s, t\}, \\
A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\
&\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}
\end{aligned}
$$

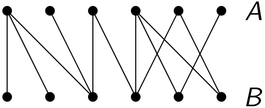


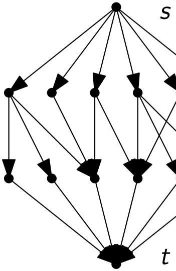
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{s, t\}, \\
A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\
&\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}
\end{aligned}
$$



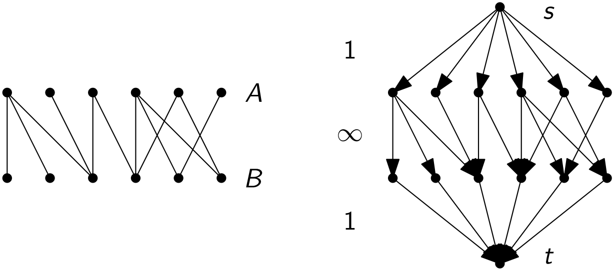


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (容量の決定)

- G' の各弧 (x, y) に対して容量を次のように定める

$$c((x, y)) = \begin{cases} 1 & (x = s \text{ または } y = t \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

- 注：「∞」は「十分大きな整数」であると見なす

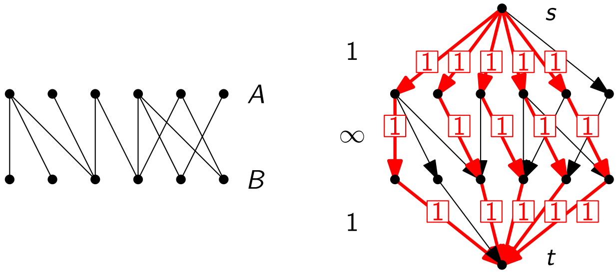


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (定理の適用)

- 最大流最小カット定理より，G' において

$$s \text{ から } t \text{ へ至る最大流の値} = \text{最小 } s,t \text{ カットの容量}$$

- 整数流定理より，各弧における流量が整数である最大流が存在
- そのような整数最大流を $f\colon A' \to \mathbb{Z}$ とする

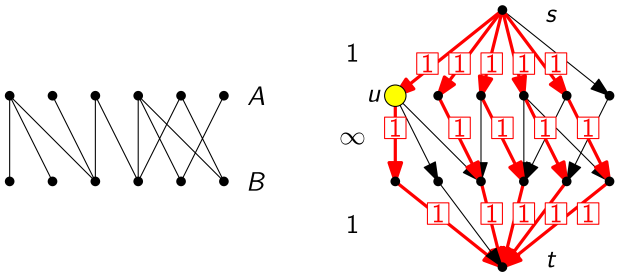


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (1))

- 容量制約より，任意の $(s,u) \in A'$ に対して

$$0 \le f((s,u)) \le 1$$

- f の整数性より，$f((s,u))$ は 0 か 1

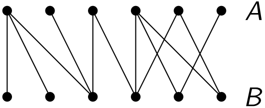


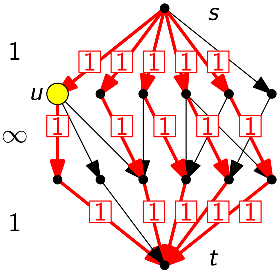
König–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (2))

- 流量保存制約より，任意の $u \in A$ に対して，

$$f((s,u)) = \sum_{v \in B, (u,v) \in A'} f((u,v))$$

- $f((s,u))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((s,u))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v)) = 1$ と $(u,v) \in A'$ を満たす $v \in B$ が
  ただ 1 つ存在する ....(性質 1)



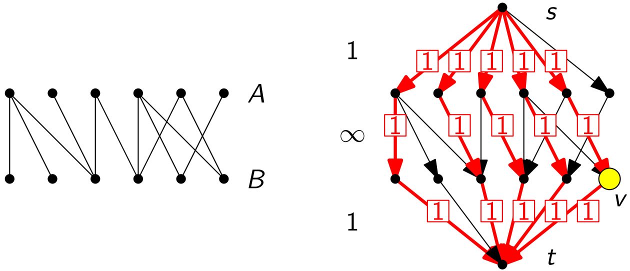


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (3))

- 容量制約より，任意の $(v, t) \in A'$ に対して

$$0 \leq f((v, t)) \leq 1$$

- f の整数性より，$f((v, t))$ は 0 か 1

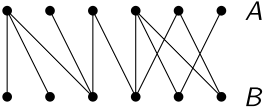


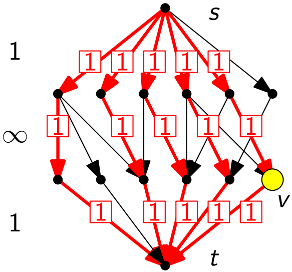
König–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (4))

- 流量保存制約より，任意の $v \in B$ に対して，

$$f((v,t)) = \sum_{u \in A, (u,v) \in A'} f((u,v))$$

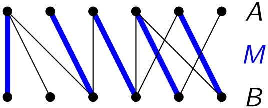
- $f((v,t))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((v,t))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v)) = 1$ と $(u,v) \in A'$ を満たす $u \in A$ が
  ただ 1 つ存在する ……………………………………(性質 2)

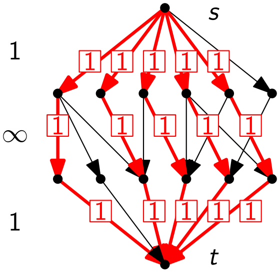




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (5))

- ここで,
$$M = \{\{u, v\} \in E \mid f((u, v)) = 1\}$$
とすると，性質 1 と性質 2 から M は G のマッチング
- また，$\mathtt{val}(f) = |M|$ である





Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針 (再掲)

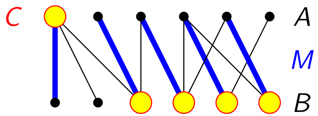
任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

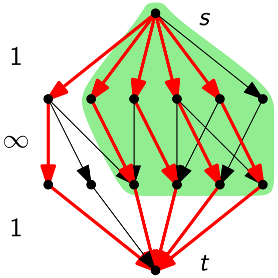
1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える $(V' = V \cup \{s, t\})$
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)

   G の最大マッチング $\leftrightarrow$ G' の最大流

   G の最小頂点被覆 $\leftrightarrow$ G' の最小 s, t カット
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，

   最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数

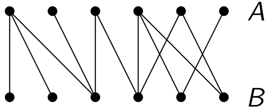


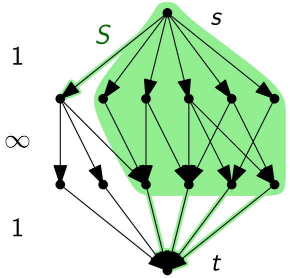


König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s,t カット S を考える
- このとき，s,t カットの定義より，$s \in S$ かつ $t \notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s,t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$ なので，

$$\mathrm{cap}(S) \leq |A|$$

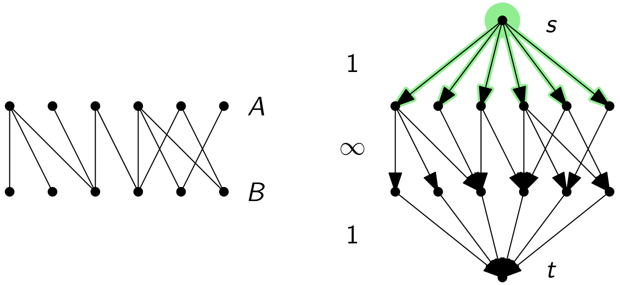




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s, t カット S を考える
- このとき，s, t カットの定義より，$s \in S$ かつ $t \notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s, t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$ なので，

$$\mathrm{cap}(S) \leq |A|$$



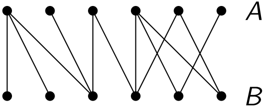
König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (2))

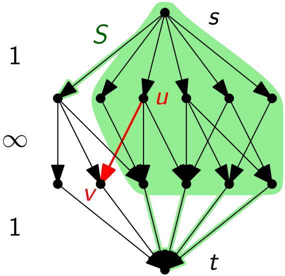
観察 3

$u \in S$, $v \notin S$, $(u, v) \in A'$ となる $u \in A$ と $v \in B$ は存在しない

なぜか？

- 存在するとすると，$\mathrm{cap}(S) \geq c((u, v)) = \infty$
- これは，$\mathrm{cap}(S) \leq |A| < \infty$ に矛盾



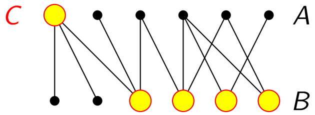


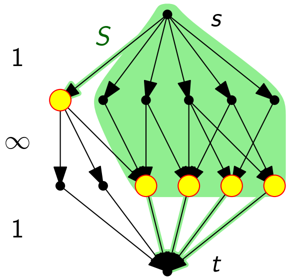
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (3))

- ここで，$C = (A - S) \cup (B \cap S)$ とする

今から確かめること

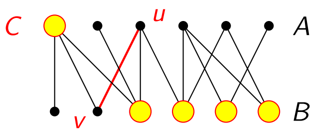
1. この C が G の最小頂点被覆となること
2. $|C| = \mathrm{cap}(S)$

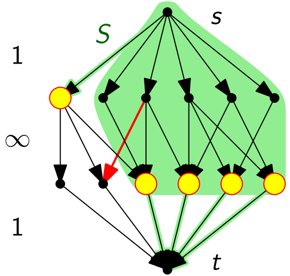




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (4))

- C が G の頂点被覆でないと仮定する
- つまり，
  ある $\{u, v\} \in E$ $(u \in A, v \in B)$ が存在して，$u \notin C$ かつ $v \notin C$
- $u \in A$ かつ $u \notin A - S$ なので，$u \in S$
- $v \in B$ かつ $v \notin B \cap S$ なので，$v \notin S$
- これは観察 3 に矛盾し，つまり，C は G の頂点被覆である．

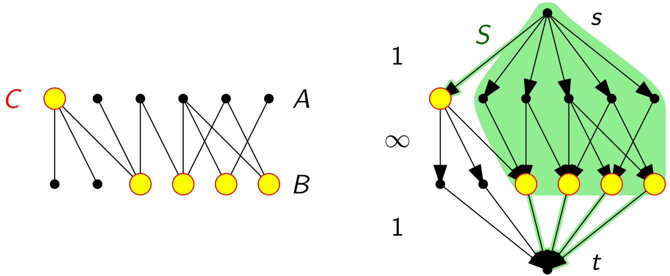




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (5))

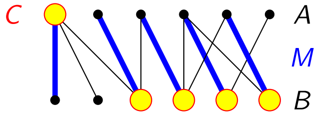
観察 3 から

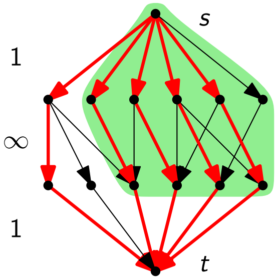
$$
\begin{aligned}
\mathrm{cap}(S) &= \sum_{u \in A, u \notin S} c((s,u)) + \sum_{v \in B, v \in S} c((v,t)) \\
&= \sum_{u \in A - S} 1 + \sum_{v \in B \cap S} 1 \\
&= |A - S| + |B \cap S| = |(A - S) \cup (B \cap S)| = |C|
\end{aligned}
$$



König–Egerváry の定理：証明 (まとめ (1))

- 流れ f から，最大マッチングの辺数 $\geq |M| = \mathtt{val}(f)$
- カット S から，最小頂点被覆の頂点数 $\leq |C| = \mathrm{cap}(S)$
- 最大流最小カット定理より，$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$



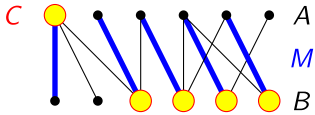


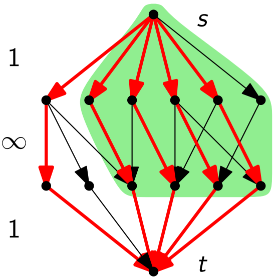
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (2))

- したがって，マッチングと頂点被覆の弱双対性より

$$\begin{aligned} \mathtt{val}(f) &\leq \text{最大マッチングの辺数} \\ &\leq \text{最小頂点被覆の頂点数} \\ &\leq \mathtt{cap}(S) = \mathtt{val}(f) \end{aligned}$$

- すなわち，最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数 $\square$





二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理：補足

二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

補足

実験第一で扱った「二部グラフの最大マッチング」における増加道法は
第 6 回講義で紹介した最大流問題に対する増加道法を
二部グラフの最大マッチング問題に適用したもの

目次

P. Hall

Philip Hall
ホール
(1904–1982)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

近傍

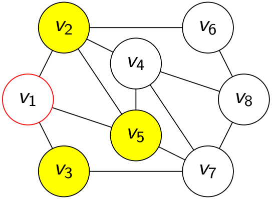
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v)\right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

近傍

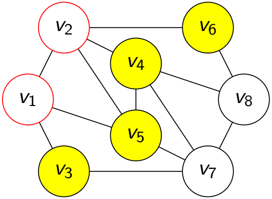
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v) \right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

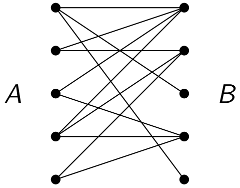
二部グラフの片側を飽和するマッチングの存在性

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

例：



「$\Leftarrow$」の証明に，Kőnig–Egerváry の定理を用いる

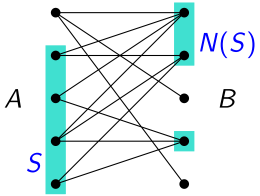
二部グラフの片側を飽和するマッチングの存在性

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

例：



「$\Leftarrow$」の証明に，Kőnig–Egerváry の定理を用いる

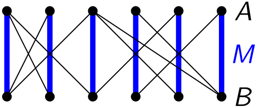
Hall の結婚定理：証明 (1)

二部グラフ $G=(V,E)$，部集合 A,B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S\subseteq A$ に対して，$|S|\leq|N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする



Hall の結婚定理：証明 (1)

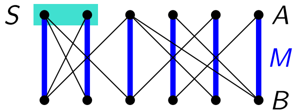
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える



Hall の結婚定理：証明 (1)

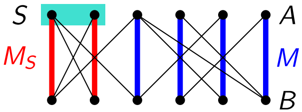
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

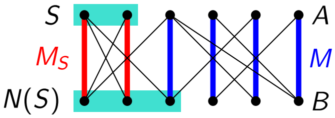
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素



Hall の結婚定理：証明 (1)

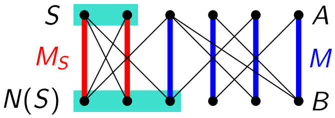
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

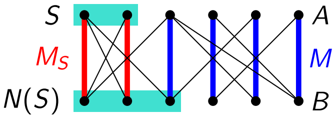
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (2)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

<u>$\Leftarrow$ の証明</u>：対偶を証明する

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとき，

$$G \text{ の最大マッチングの辺数} < |A|$$

Hall の結婚定理：証明 (3)

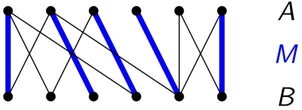
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $< |A|$



Hall の結婚定理：証明 (3)

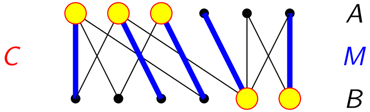
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $< |A|$
- Kőnig–Egerváry の定理より，G の最小頂点被覆の頂点数 $< |A|$
- C を G の最小頂点被覆とする ($|C| < |A|$)



Hall の結婚定理：証明 (3)

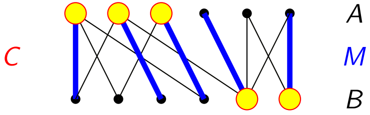
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $< |A|$
- Kőnig–Egerváry の定理より，G の最小頂点被覆の頂点数 $< |A|$
- C を G の最小頂点被覆とする ($|C| < |A|$)
- $A \cap C$ と $B \cap C$ を考える



Hall の結婚定理：証明 (4)

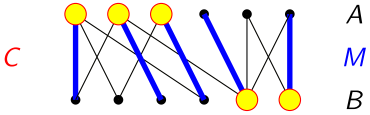
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$



Hall の結婚定理：証明 (4)

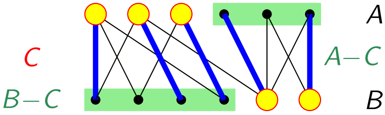
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

<u>証明 (続き)</u>：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- よって，$|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$



Hall の結婚定理：証明 (4)

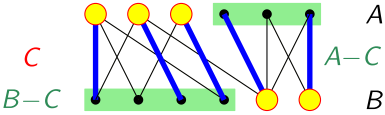
二部グラフ $G=(V,E)$，部集合 A,B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- よって，$|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$
- C は頂点被覆なので，$A - C$ と $B - C$ の間に辺はない
- したがって，$N(A-C) \subseteq B \cap C$



Hall の結婚定理：証明 (5)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

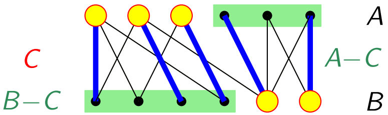
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- 以上をまとめると，

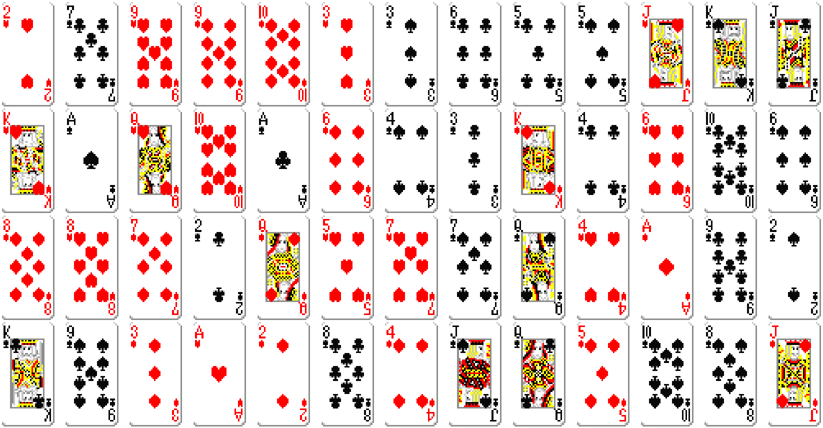
$$|N(A - C)| \leq |B \cap C| < |A - C|$$

- つまり，$S = A - C$ とすると，$|N(S)| < |S|$ $\square$

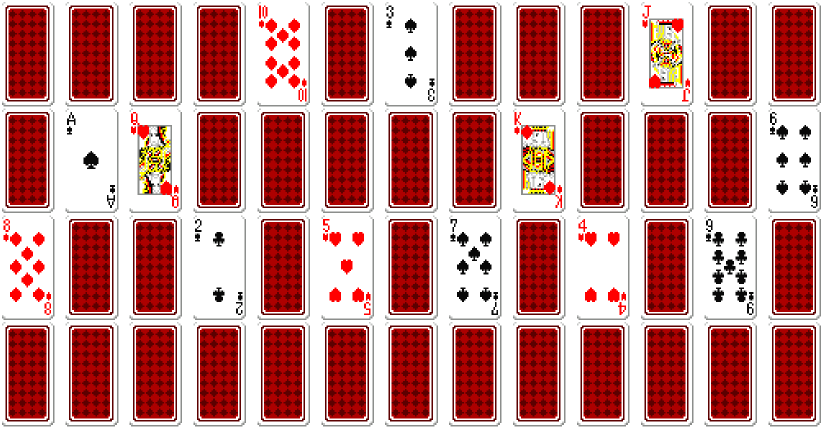


目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



トランプ・マジック (？) のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

$\leadsto$ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフの構成 (1)

13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)

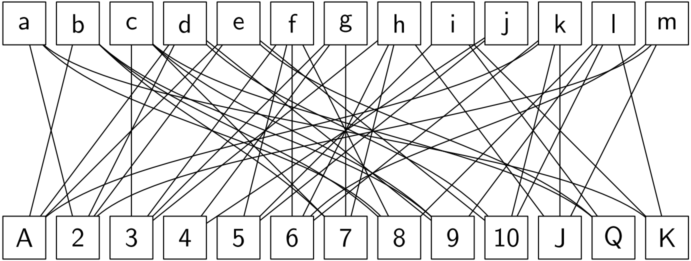
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフの構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，

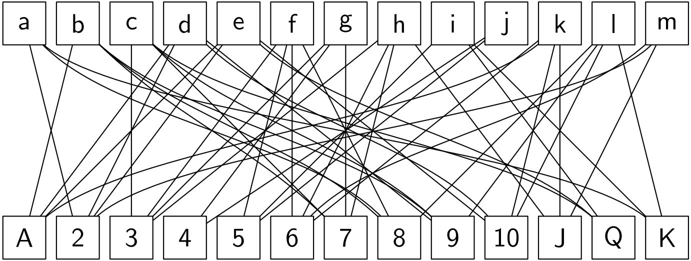


そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- $A =$ グループに対応する頂点の集合
- $B =$ カードのランクに対応する頂点の集合

トランプ・マジック (？) のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

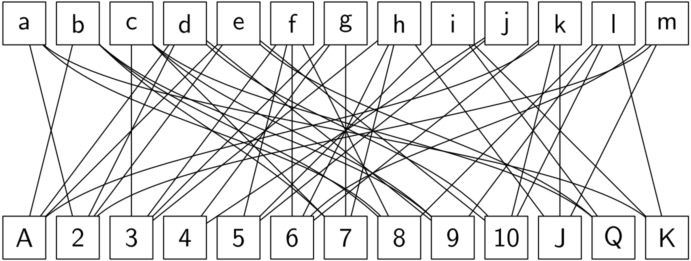


Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \le |N(S)|$

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認

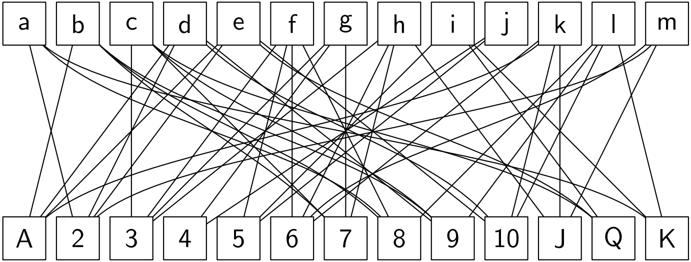
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

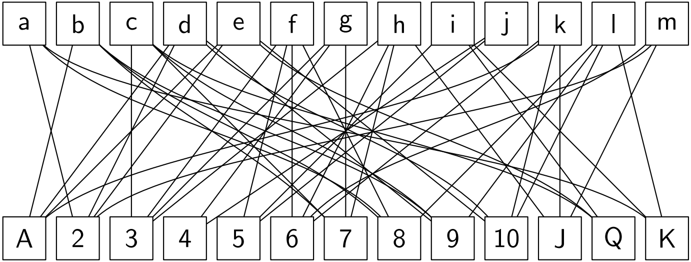
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N(S)|$

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

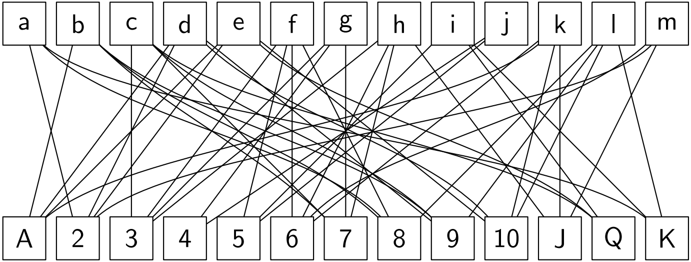
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N(S)|$
- 背理法：$|S| > |N(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認（続き）

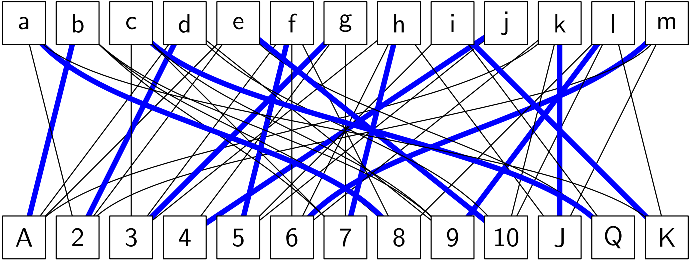
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N(S)|$
- 背理法：$|S| > |N(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない
- よって，$|S| \leq |N(S)|$ でないといけない

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

つまり，Hall の結婚定理にある条件が必ず成り立つ．



- つまり，A を飽和するマッチングが存在
- そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて,
  二部グラフにおける，最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を証明できる
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明できる
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決できる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次