グラフとネットワーク 第 5 回
マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 5 月 18 日

最終更新：2015 年 5 月 15 日　16:32

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)

* みどりの日で休み (5/4)

4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)

- 中間試験 (6/8)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9. 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10. 彩色：数理 (6/29)
11. 彩色：モデル化 (7/6)
12. 平面グラフ：数理 (7/13)

* 海の日で休み (7/20)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14. 予備日 (講義は行う) (8/3)

- 期末試験 (8/10？)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

格言

- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

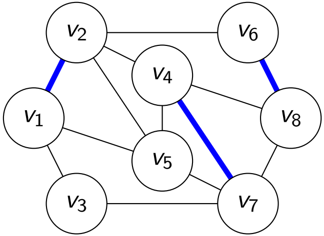
- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)
- スリザーの必勝戦略

グラフにおけるマッチング

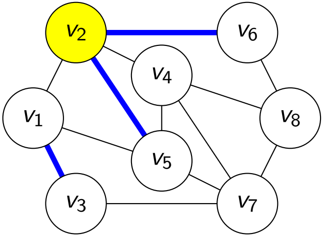
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

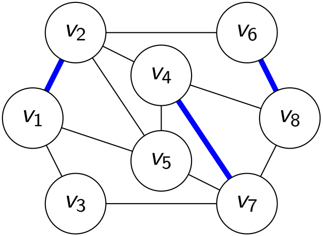
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大マッチング

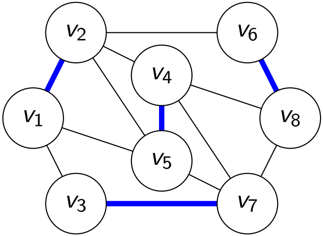
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



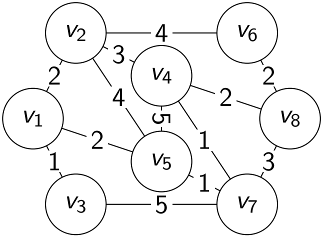
最大マッチングである

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



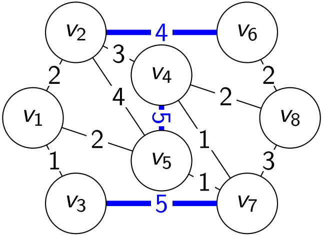
以後， $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



以後, $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

完全グラフにおける最大重みマッチング

次は正しい (演習問題)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G の任意の最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
w に関する G の任意の最大重みマッチングは G の最大マッチングである

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの

事実

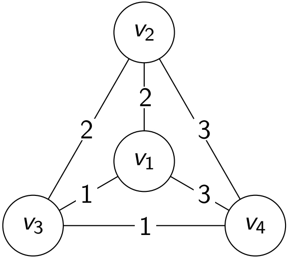
最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる (Edmonds, ’65)

- Edmonds のアルゴリズムは，増加道を見つける手続きをサブルーチンとして用いている

効率よく $=$ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$



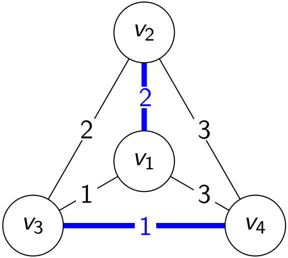
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$



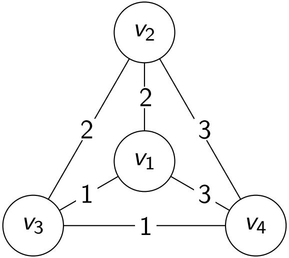
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

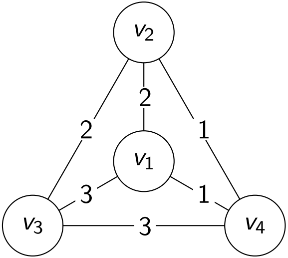
完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$





辺重み：$w(e)$

$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

演習問題

任意の辺 $e \in E$ に対して，$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$ としたとき

M が w に関する G の最小重み完全マッチングである $\Leftrightarrow$
M が w' に関する G の最大重みマッチングである

つまり，最小重み完全マッチングを見つけるためには，
最大重みマッチング問題が解ければよい (帰着)

概要

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)
  $\rightsquigarrow$ 完全グラフにおける最小重み完全マッチング
- スリザーの必勝戦略
  $\rightsquigarrow$ 最大マッチング

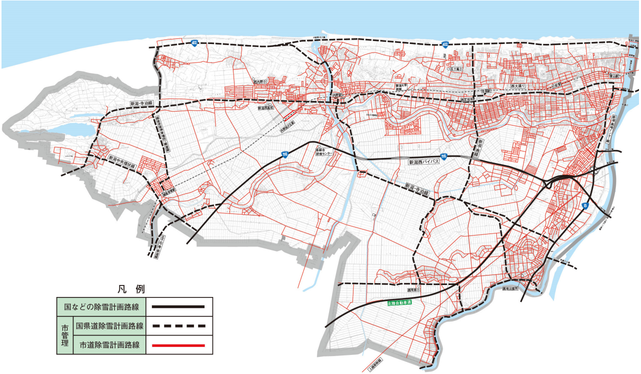
目次

除雪車の運行計画問題

除雪車の運行計画問題

除雪車を効率よく運行するルートを決定したい

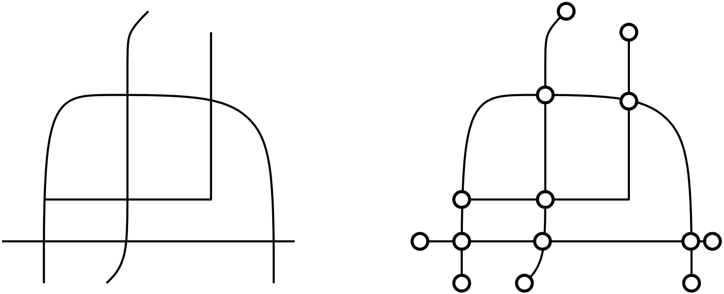
以下，除雪車が 1 台だけの場合を考える



https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html

交通網のモデル化

道路ネットワークをグラフとしてモデル化

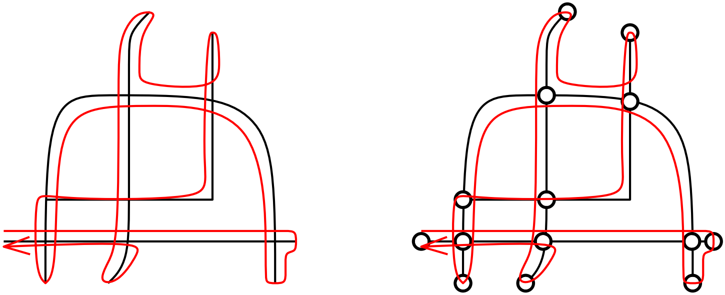


交差点，行き止まり → 頂点
道路 → 辺

問題によっては有向グラフを使うこともある

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る



二度以上通っている辺には「無駄」がある
⇝ 「無駄」を最小化したい

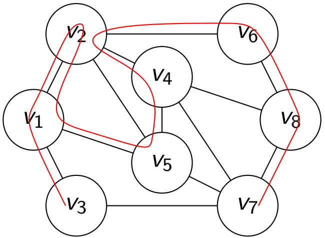
グラフにおける歩道

無向グラフ $G = (V, E)$

歩道とは？

G における**歩道**とは，頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で
任意の $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して，$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ であるもの

直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい道」



$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7$ はこのグラフにおける歩道

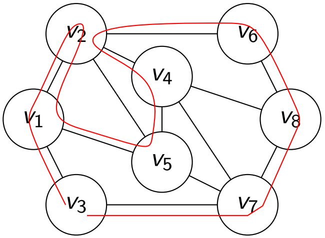
グラフにおける回路

無向グラフ $G = (V, E)$

回路とは？

G における回路 (または閉歩道) とは，歩道 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で $v_1 = v_k$ を満たすもののこと

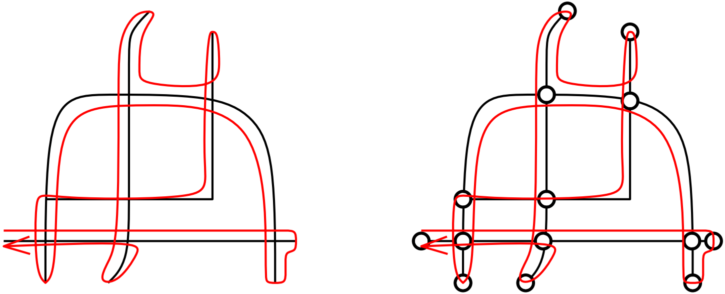
直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい閉路」



$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7, v_3$ はこのグラフにおける回路

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る



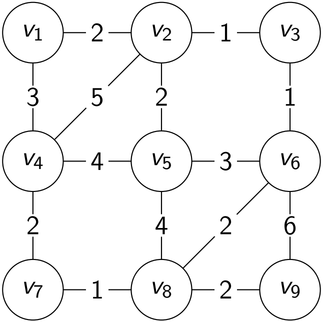
二度以上通っている辺には「無駄」がある
⇝ 「無駄」を最小化したい

行いたいこと

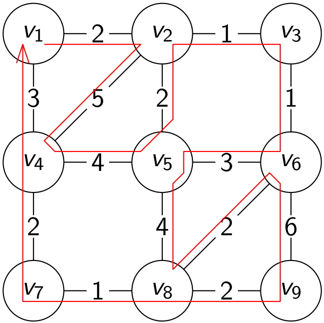
すべての辺を通る回路で,「長さ」が最小のものを見つけたい

長さ = 辺の重み (長さ) の和

例題 1



例題 1



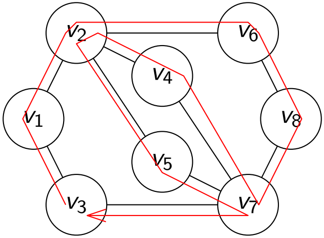
無駄のない除雪計画
(すべての辺をちょうど一度ずつ通る回路が存在)

オイラー回路

無向グラフ $G = (V, E)$

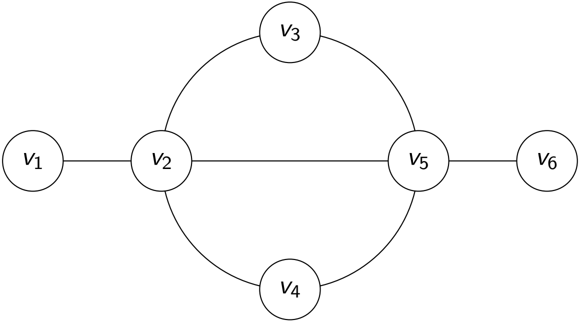
オイラー回路とは？

G におけるオイラー回路とは，回路 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で
G のすべての辺をちょうど一度ずつ通るもの



オイラー回路を持たないグラフ

次のグラフはオイラー回路を持たない

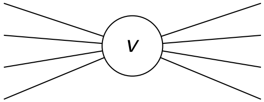


どんなグラフがオイラー回路を持ち，
どんなグラフがオイラー回路を持たないのだろうか？

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

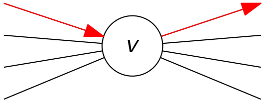


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

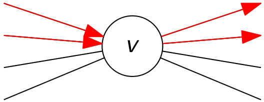


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

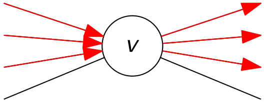


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

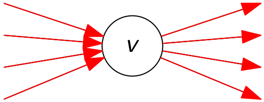


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数



つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要十分条件

無向グラフ $G = (V, E)$

オイラー回路を持つための必要十分条件

G がオイラー回路を持つ $\Leftrightarrow$ 次の 2 つがともに成り立つ

1. G は連結
2. G の任意の頂点の次数が偶数

「$\Rightarrow$」の証明：演習問題 (前ページの内容がヒント)
「$\Leftarrow$」の証明の概略：辺数に関する帰納法

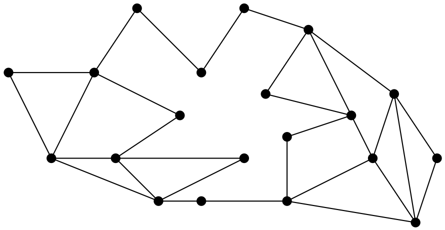
- $|E| = 0$ のときを考えると，G は辺数 0 のオイラー回路を持つ
- 辺数 k 以下の任意の無向グラフ G' に対して，
  G' が連結であり，G' の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
  G' がオイラー回路を持つと仮定する

オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，
G が連結であり，G の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
G がオイラー回路を持つ

- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上

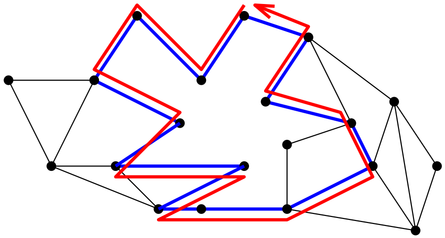


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，
G が連結であり，G の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
G がオイラー回路を持つ

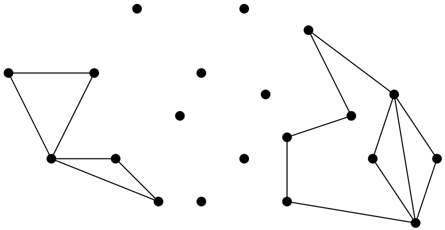
- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上
- 演習問題 2.6 より，G は閉路を含む (それを C とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

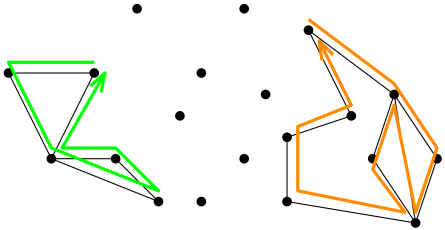
- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)

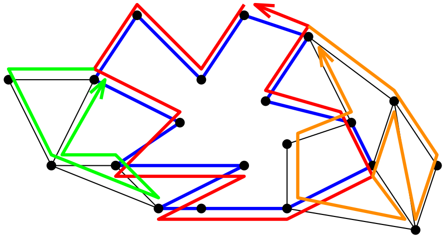


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 3)

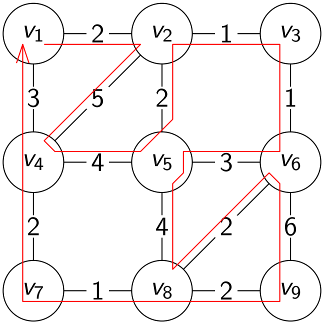
G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- $C_1, \ldots, C_k$ と C を組み合わせることで,
  G のオイラー回路を構成できる (詳細は演習問題)

□



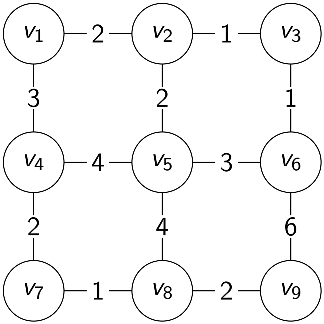
例題 1 (再び)



各頂点の次数が偶数

- $\therefore$ オイラー回路が存在
- $\therefore$ 無駄のない除雪が可能

例題 2

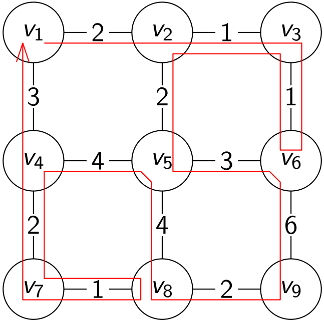


次数が奇数である頂点が存在

- ∴ オイラー回路が存在しない
- ∴ 無駄のない除雪が可能ではない
- ⇝ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

例題 2

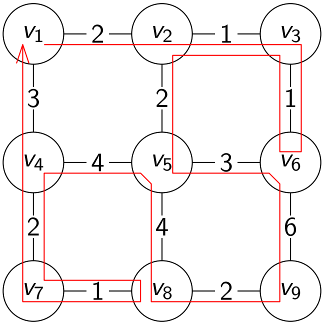


次数が奇数である頂点が存在

- ∴ オイラー回路が存在しない
- ∴ 無駄のない除雪が可能ではない
- ⇝ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

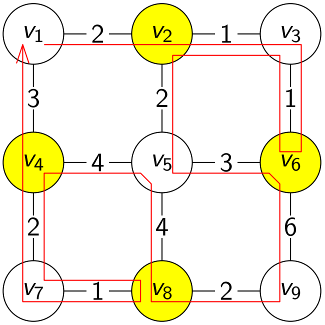
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数　　(演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

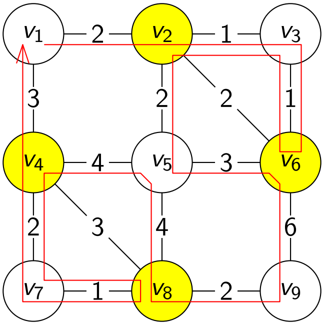
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

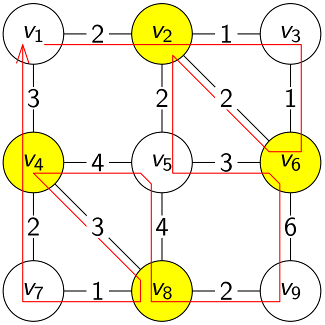
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

例題 2：仮想的な道路を追加

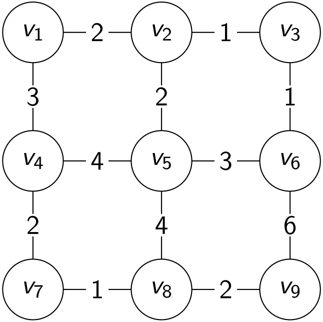


- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

無駄を抑える辺の引き方

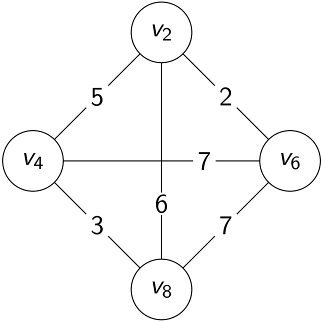
次数が奇数である頂点の間で，最も効率的な経路の長さを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

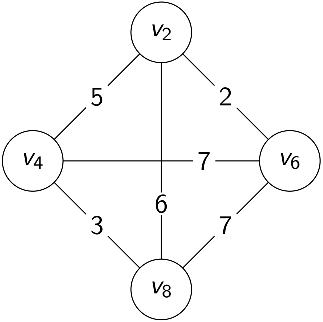
次のような完全グラフと非負辺重みを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

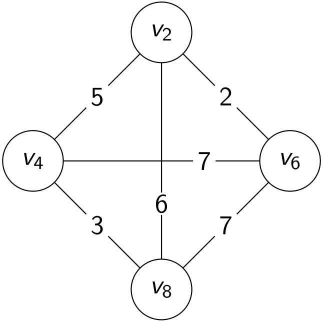
各頂点は元のグラフにおいて次数が奇数である頂点 (注：頂点数は偶数)



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

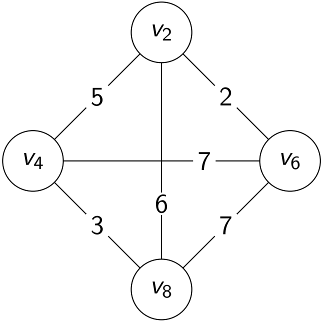
辺の重みは，対応する 2 頂点間の最短経路長



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

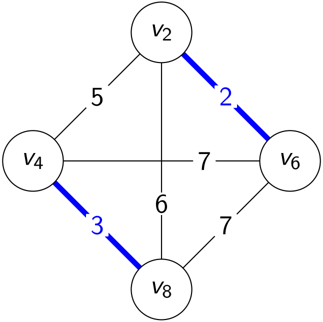
求めたいものは，最小重み完全マッチング



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

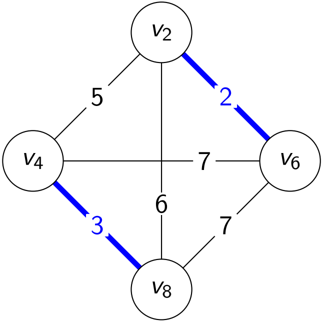
次のマッチングは最小重み完全マッチング

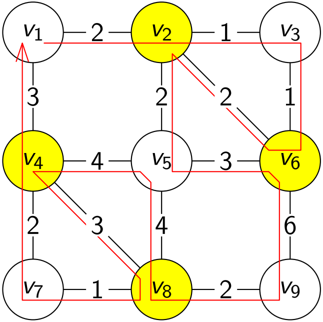


	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	−	5	2	6
v_4		−	7	3
v_6			−	7
v_8				−

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





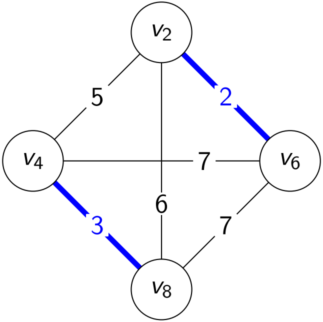
格言

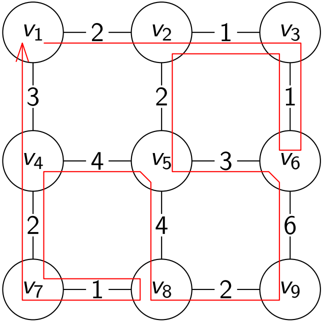
モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





格言

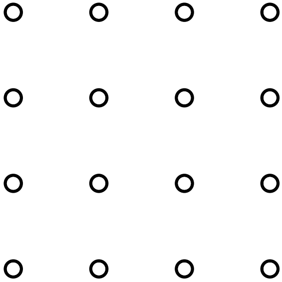
モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

目次

スリザー (David Silverman)

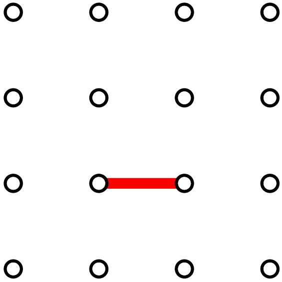
格子上で遊ぶゲーム



たてよこに隣りあう点を交互に結ぶ

スリザー (David Silverman)

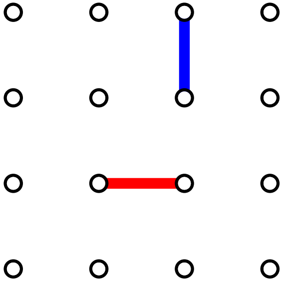
格子上で遊ぶゲーム



たてよこに隣りあう点を交互に結ぶ

スリザー (David Silverman)

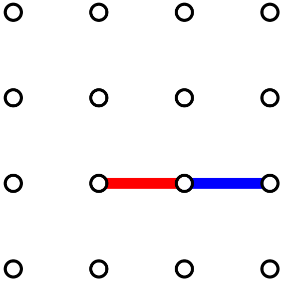
格子上で遊ぶゲーム



必ず道になるように結ばないといけない

スリザー (David Silverman)

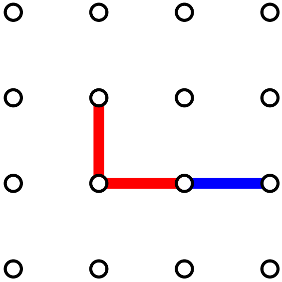
格子上で遊ぶゲーム



必ず道になるように結ばないといけない

スリザー (David Silverman)

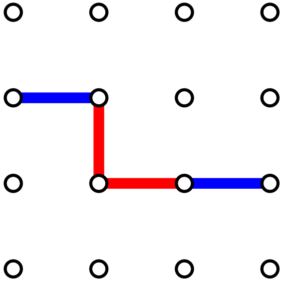
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

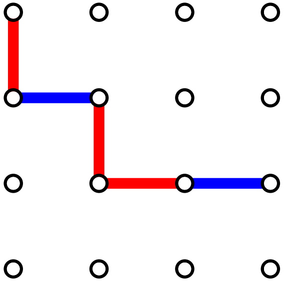
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

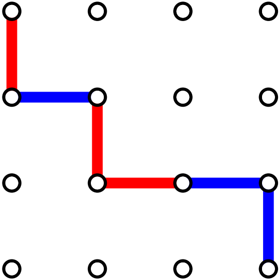
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

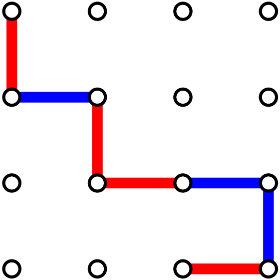
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

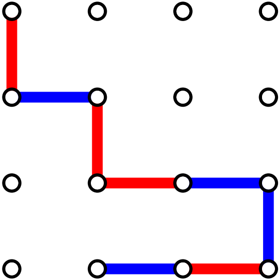
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

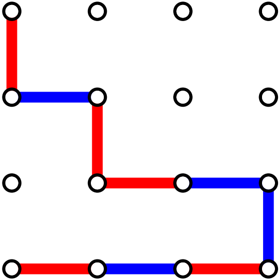
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

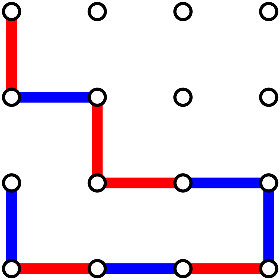
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

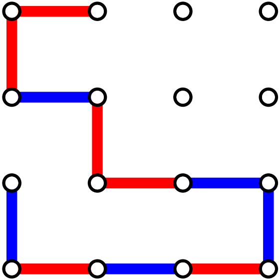
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

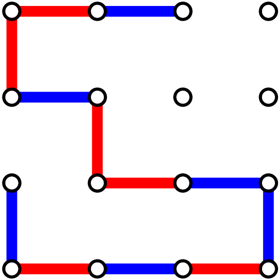
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

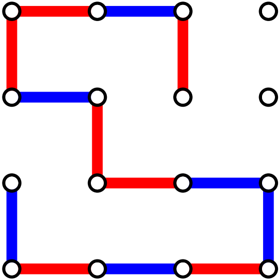
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

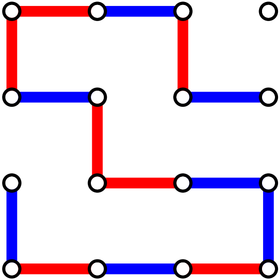
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

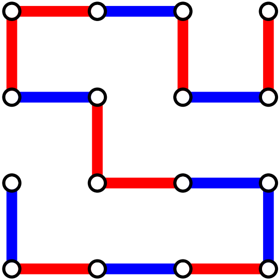
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

スリザー (David Silverman)

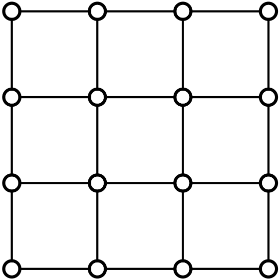
格子上で遊ぶゲーム



結べなくなった方の負け

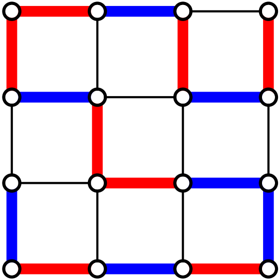
無向グラフ上のスリザー

スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



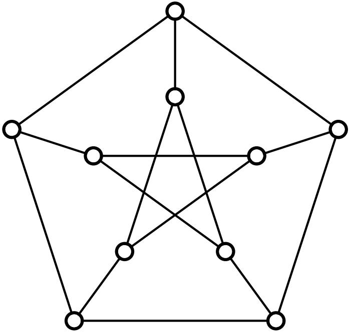
無向グラフ上のスリザー

スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



無向グラフ上のスリザー：別の例

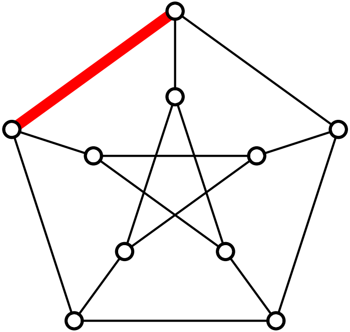
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

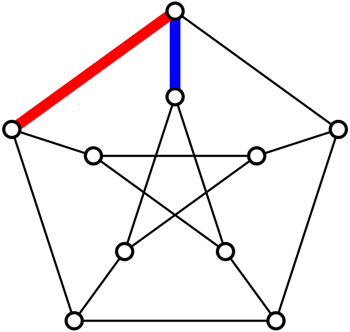
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

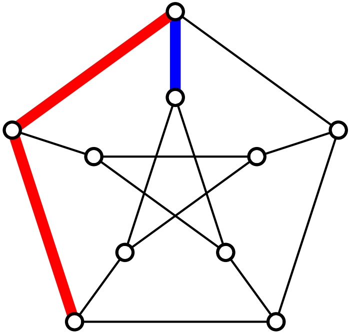
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

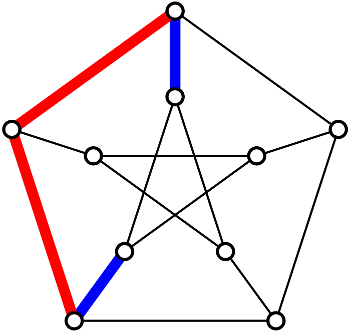
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

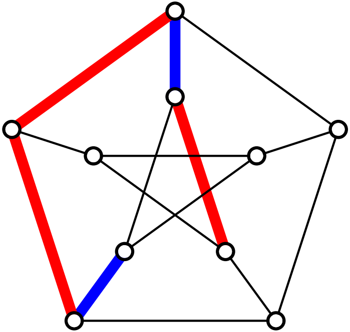
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

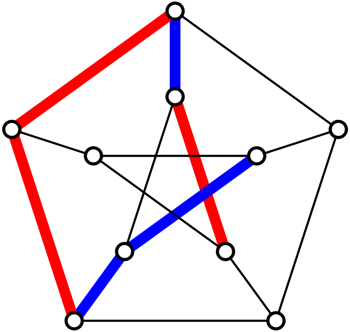
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

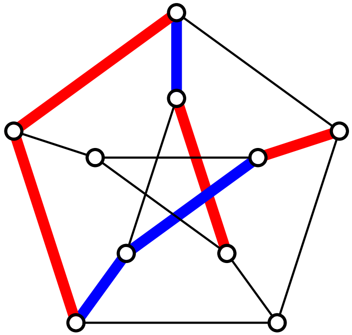
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

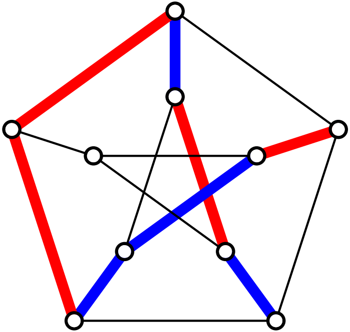
スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

無向グラフ上のスリザー：別の例

スリザーを無向グラフの辺を選ぶゲームだと見なす



このグラフはペテルセン・グラフと呼ばれる有名な無向グラフ

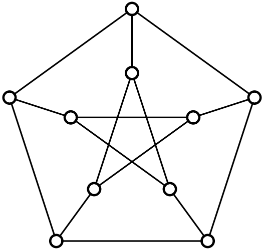
先手必勝の場合

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

先手必勝の場合

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝

先手必勝：先手と後手が最善を尽くしたとき，先手が必ず勝てる



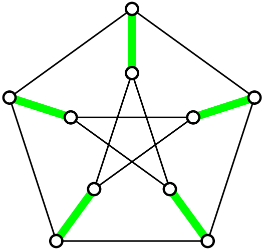
先手必勝の場合

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

先手必勝の場合

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝

先手必勝：先手と後手が最善を尽くしたとき，先手が必ず勝てる



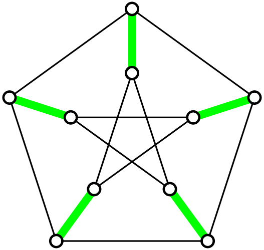
先手必勝の場合

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

先手必勝の場合

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝

先手必勝：先手と後手が最善を尽くしたとき，先手が必ず勝てる



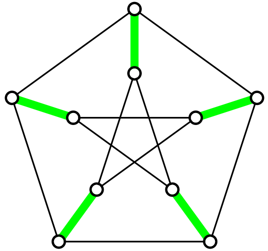
つまり，ペテルセン・グラフ上のスリザーは先手必勝

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

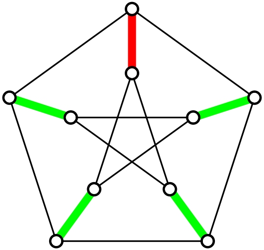


G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

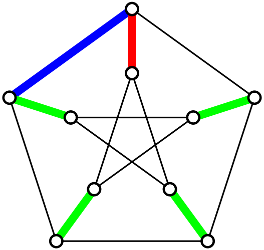


G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

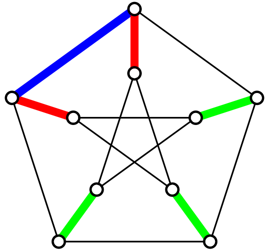


G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

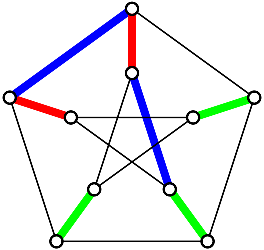


G が完全マッチングを持つ ⇒ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

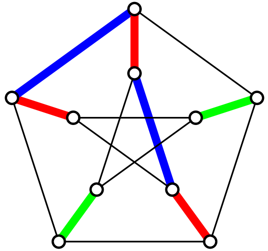


G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

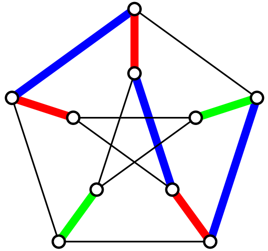


G が完全マッチングを持つ ⇒ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

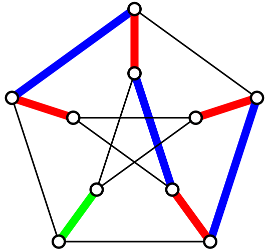


G が完全マッチングを持つ ⇒ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

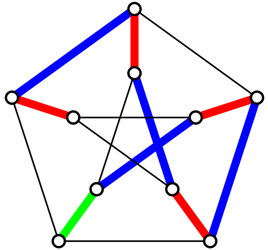


G が完全マッチングを持つ ⇒ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

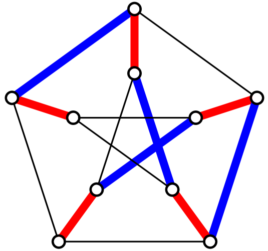


G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (1)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (2)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

重要な性質

上の戦略に従って，先手は必ず M の辺を選べる

重要な性質の証明：まず，初手では成り立っている

- ある段階で，先手が M の辺を選んだ後を考える
- このとき，M が完全マッチングなので，後手は M の辺を選べない
- つまり，後でできる道の端点の 1 つは，未選択の M の辺と接続する
- つまり，この後，先手は必ず M の辺を必ず選べることになる □

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (3)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

重要な性質

上の戦略に従って，先手は必ず M の辺を選べる

証明の続き：

- 先手は必ず辺を選べるので，先手は負けない
- つまり，先手は必ず勝てる □

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝：証明 (3)

- M を G の完全マッチングとする

次のような先手の戦略を考える

1. 初手は M の任意の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

重要な性質

上の戦略に従って，先手は必ず M の辺を選べる

証明の続き：
- 先手は必ず辺を選べるので，先手は負けない
- つまり，先手は必ず勝てる □

格言

アルゴリズムとプログラムの正当性の鍵は不変条件

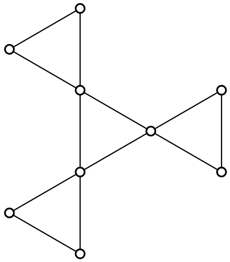
後手必勝の場合

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

後手必勝の場合

任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を飽和しない G の最大マッチングが存在
$\Rightarrow$ 後手必勝

後手必勝：先手と後手が最善を尽くしたとき，後手が必ず勝てる



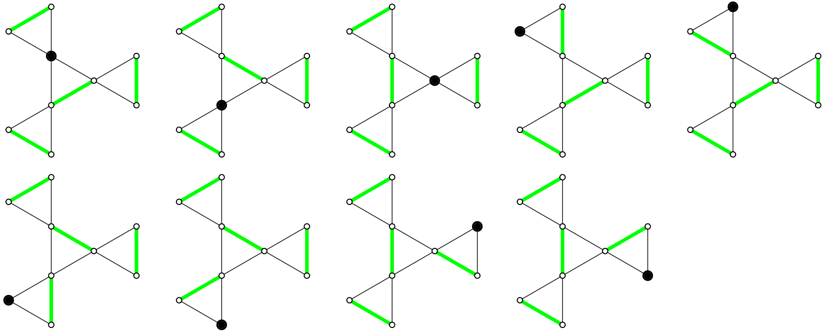
このグラフ上のスリザーは後手必勝

後手必勝の場合：例

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

後手必勝の場合

任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を飽和しない G の最大マッチングが存在
$\Rightarrow$ 後手必勝



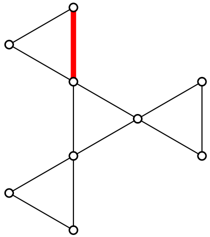
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



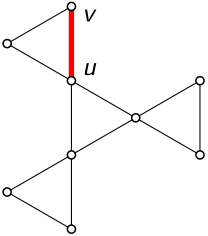
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



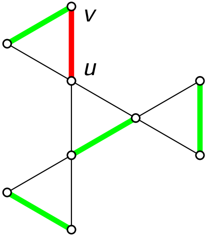
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



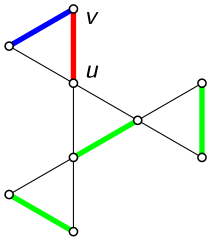
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 $\Rightarrow$ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



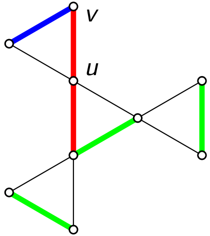
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



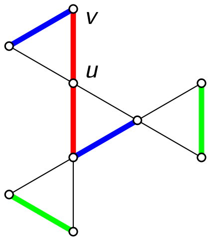
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



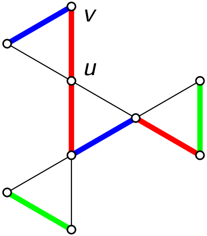
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



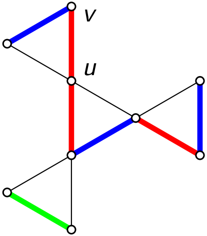
各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (1)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ



各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (2)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

重要な性質

上の戦略に従って，後手は必ず M の辺を選べる

重要な性質の証明：まず，初手で成り立っていることを示す

- 背理法：v に接続する M の辺がないと仮定する
- つまり，M は u も v も飽和しない
- よって，$M \cup \{\{u, v\}\}$ も G のマッチングで，$|M \cup \{\{u, v\}\}| > |M|$
- これは，M が最大マッチングであることに矛盾

各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (2)

重要な性質

上の戦略に従って，後手は必ず M の辺を選べる

重要な性質の証明 (続き)：ある段階で後手が M の辺を選んだ後を考える

- このとき，先手は M の辺を選べない　(なぜか？)
  - 先手が選ぶ辺は u に接続するか，先手が選んだ辺に接続する
  - M は u を飽和しないので，前者の場合，M の辺は選ばれない
  - 先手が選ぶ辺は M の辺なので，後者の場合も M の辺は選ばれない

各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (3)

重要な性質

上の戦略に従って，後手は必ず M の辺を選べる

重要な性質の証明 (続き)：先手が M に属さない辺を選んだ後を考える

- できつつある道の端点を x, y とする
- 一般性を失わずに $x \neq u$
- できつつある道における x と u を結ぶ部分を考える
- x が M の辺に接続しないと，この部分道が M に関する増加道となる
- M が最大マッチングであることに矛盾
- つまり，x は M の辺に接続する □

各頂点を飽和しない最大マッチングが存在 ⇒ 後手必勝：証明 (4)

まず，先手が任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を選ぶ

- M を G の最大マッチングで u を飽和しないものとする

次のような後手の戦略を考える

1. 初手は v に接続する M の辺を選ぶ
2. 2 手目以降は選べる M の辺を選ぶ

重要な性質

上の戦略に従って，後手は必ず M の辺を選べる

証明の続き：

- 後手は必ず辺を選べるので，先手は負けない
- つまり，後手は必ず勝てる □

無向グラフ上のスリザー：まとめ

無向グラフ $G = (V, E)$ 上のスリザーを考える

先手必勝の場合

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 先手必勝

後手必勝の場合

任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を飽和しない G の最大マッチングが存在 $\Rightarrow$ 後手必勝

G がこの 2 条件のどちらも満たさない場合はどうなのか？

- 与えられた無向グラフ G に対して，それ上のスリザーが先手必勝か後手必勝か判定する効率よいアルゴリズムが知られている

(Anderson '73)

目次

概要

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)
- スリザーの必勝戦略

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次