グラフとネットワーク 第 3 回
木：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 4 月 27 日

最終更新：2015 年 4 月 23 日　13:41

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)
* みどりの日で休み (5/4)
4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)
- 中間試験 (6/8)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9. 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10. 彩色：数理 (6/29)
11. 彩色：モデル化 (7/6)
12. 平面グラフ：数理 (7/13)

* 海の日で休み (7/20)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14. 予備日 (講義は行う) (8/3)

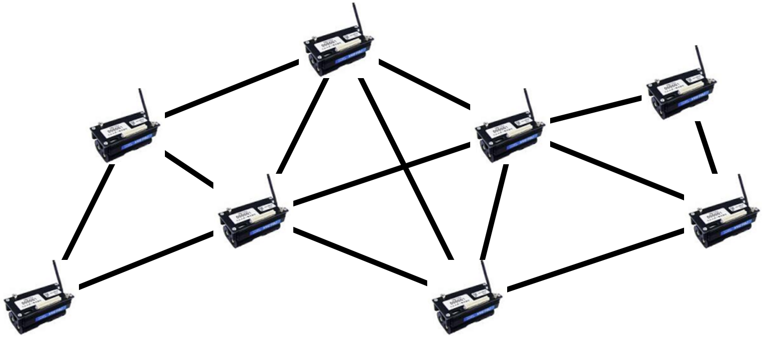
- 期末試験 (8/10？)

注意：予定の変更もありうる

センサネットワークにおける通信

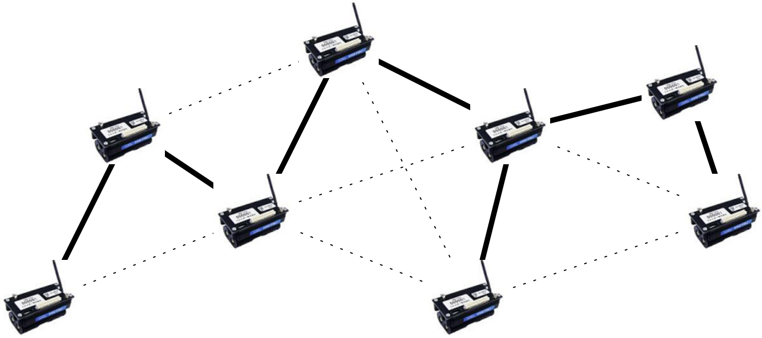
http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

センサネットワークにおける通信



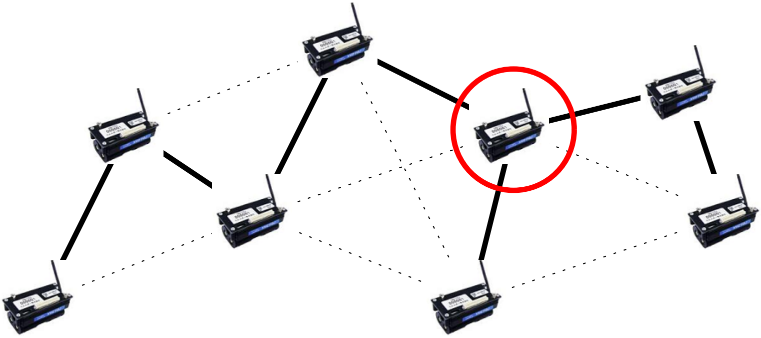
http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

センサネットワークにおける通信

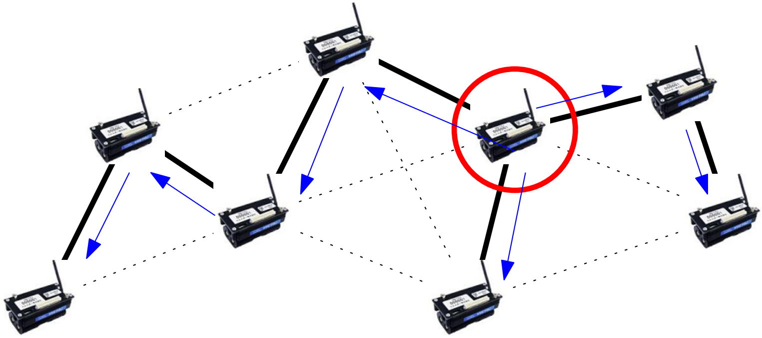


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

センサネットワークにおける通信

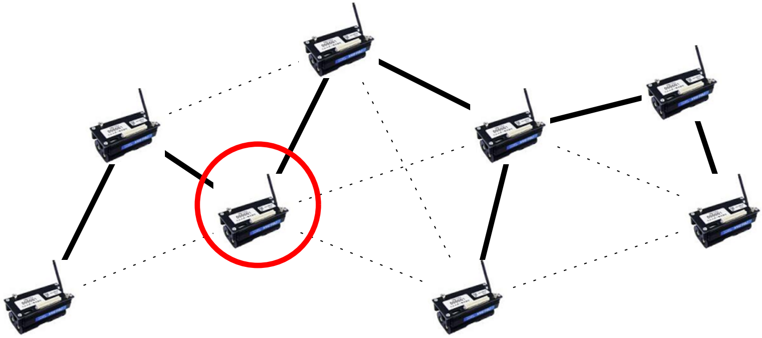


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/



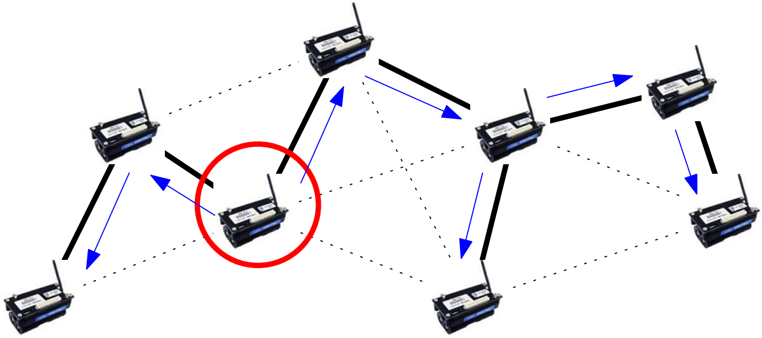
http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

センサネットワークにおける通信



http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

センサネットワークにおける通信



http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

今日の目標

「木」を理解する

- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる

証明技法

- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

離散数学における証明手法

- 数え上げ論法 (前々回)
- 最大性論法／最小性論法 (前回)
- 数学的帰納法 (今回)

目次

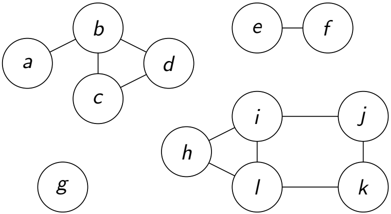
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

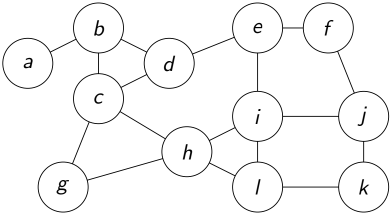
グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

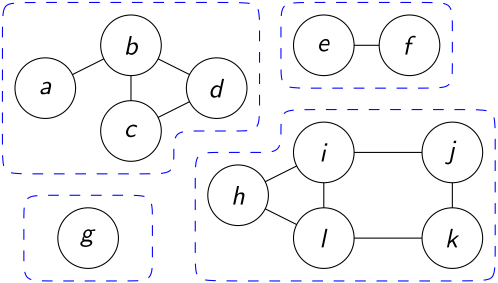
グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

G の連結成分とは，G の極大連結部分グラフのこと

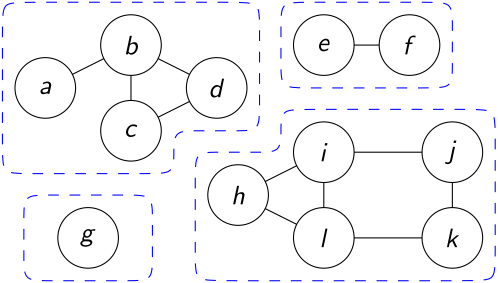
(「極大」とは，グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」)



連結成分の数 $= 4$

グラフの孤立点

次数 0 の頂点を孤立点と呼ぶ



g は孤立点

グラフの切断辺

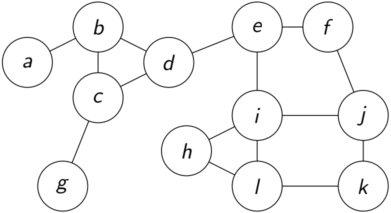
無向グラフ $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

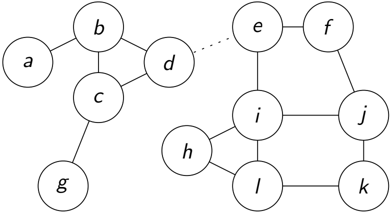
e が G の**切断辺**であるとは，
G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$$G - e \text{ の連結成分の数} > G \text{ の連結成分の数}$$

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点

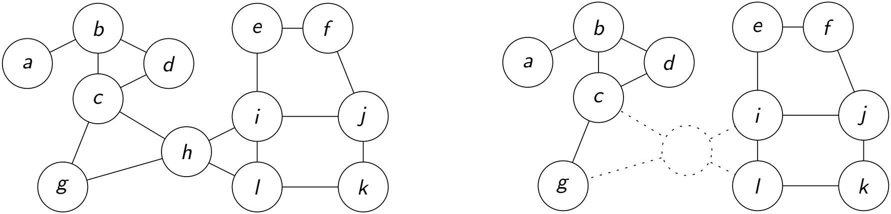
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

v が G の切断点であるとは，
G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$$G - v \text{ の連結成分の数} > G \text{ の連結成分の数}$$

h は G の切断点　（「v を除去」とは，v と v に接続する辺すべてを除去すること）



G　　　　$G - h$

目次

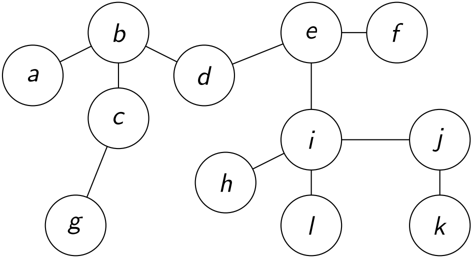
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



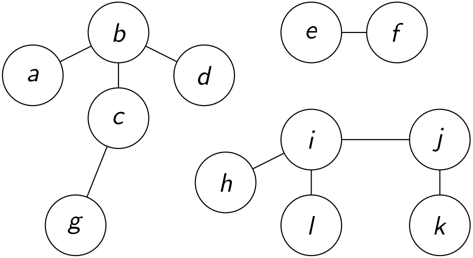
森

無向グラフ $G = (V, E)$

森とは？

G が森 (または林) であるとは，次の条件を満たすこと

- G は閉路を部分グラフとして含まない



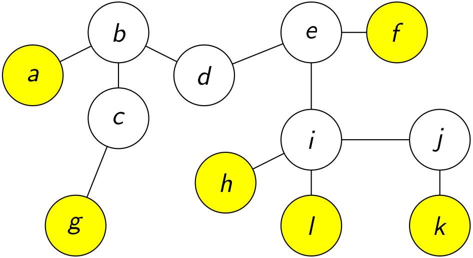
木は森であり，森の各連結成分は木である

木と葉

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$

木は葉を持つ

G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する

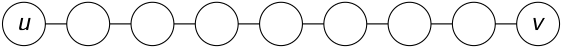


木における次数 1 の頂点を葉と呼ぶ

木は葉を持つ：証明 (1)

最大性論法に基づく.

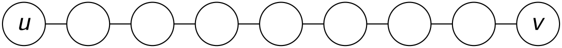
- G に含まれる長さ最大の道を P とする.



木は葉を持つ：証明 (1)

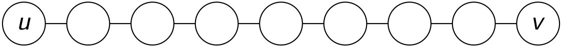
最大性論法に基づく.

- G に含まれる長さ最大の道を P とする.
- G は連結であり，$|V| \geq 2$ なので，P の頂点数は 2 以上.
- P の端点を u, v とする.
  (このとき，P の頂点数が 2 以上であることから，$u \neq v$．)



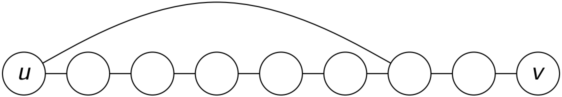
木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する．
- 矛盾．
- したがって，u の次数は 1 である．



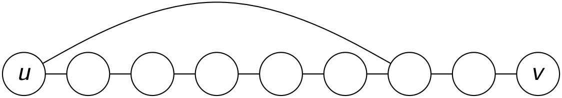
木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する.
- P が長さ最大の道であることから，u に隣接する頂点は P 上にある.
- 矛盾.
- したがって，u の次数は 1 である.



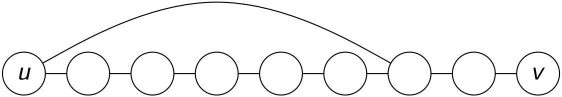
木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する．
- P が長さ最大の道であることから，u に隣接する頂点は P 上にある．
- したがって，G は閉路を含む．
- これは G が閉路を含まないことに矛盾．
- したがって，u の次数は 1 である．



木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する．
- P が長さ最大の道であることから，u に隣接する頂点は P 上にある．
- したがって，G は閉路を含む．
- これは G が閉路を含まないことに矛盾．
- したがって，u の次数は 1 である．
- 同様に，v の次数も 1 である． $\square$

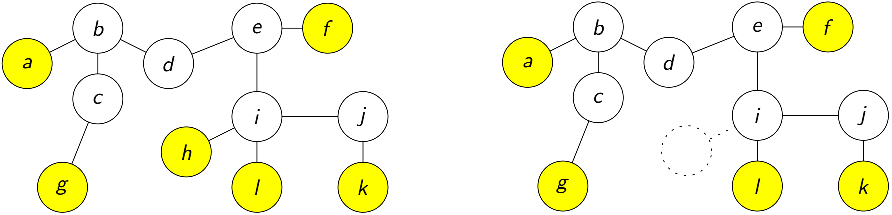


木における葉の役割

木 $G=(V,E)$，$|V|\geq 2$，その葉 $v\in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G-v$ も木



G　　　　$G-h$

格言

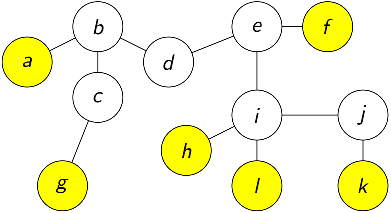
仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木における葉の役割

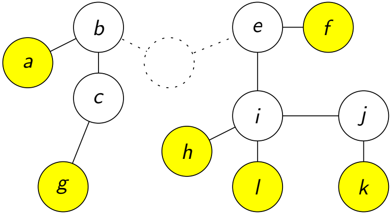
木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



$G - d$

格言

仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

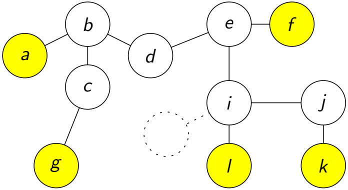
木から葉を除去しても木：証明の着想

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明の着想：定義に戻る



木であることの定義

- 連結である
- 閉路を含まない

- $G - v$ が閉路を含まないことは簡単に分かる
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w に対して，u から w に至る道が存在すればよい
- G において，u から w に至る道で，v を通らないものが存在すればよい

木から葉を除去しても木：証明 (1)

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

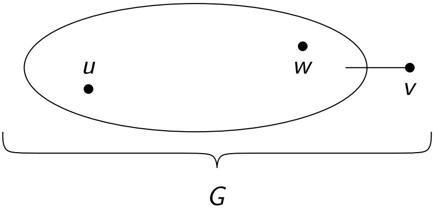
証明：$G - v$ が閉路を含まず，かつ，連結であることを示す．
[閉路を含まないこと]

- G は木なので，G は閉路を含まない
- $G - v$ は G の部分グラフなので，$G - v$ も閉路を含まない．

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

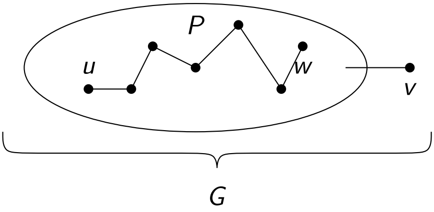
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える．
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること．



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

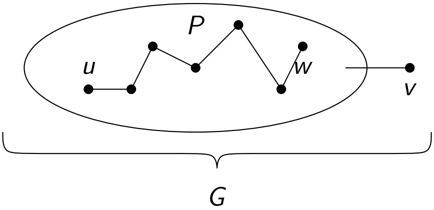
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える．
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること．
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する．



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

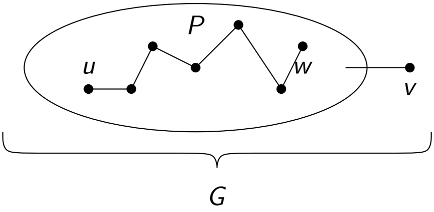
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える．
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること．
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する．
- P において，u, w 以外の頂点の次数は 2 以上．



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

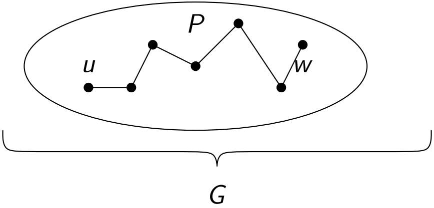
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える．
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること．
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する．
- P において，u, w 以外の頂点の次数は 2 以上．
- v の次数は 1 なので，P は v を通らない．



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える．
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること．
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する．
- P において，u, w 以外の頂点の次数は 2 以上．
- v の次数は 1 なので，P は v を通らない．
- したがって，P は $G - v$ において u から w へ至る道である．　□

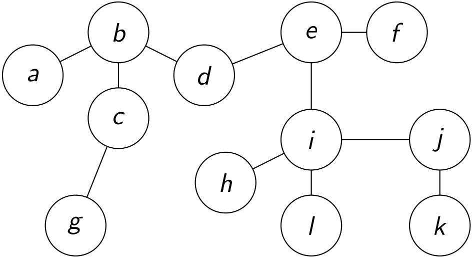


木の辺数

木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$



$|V| = 12, \ |E| = 11$

木の辺数：帰納法による証明 (1)

木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明：$|V|$ に関する帰納法

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

木の辺数：帰納法による証明 (2)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明：n に関する帰納法で証明する．

- 頂点数 1 の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．(つまり，$|V| = 1$)
- G は辺を持たないので，その辺の数 $|E|$ は 0.
- したがって，$|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$.

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明 (続き)：帰納段階へ進む．

- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

<u>証明 (続き)</u>：帰納段階へ進む．

- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

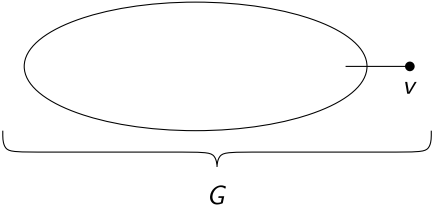
「任意の〜に対して…である」という命題の証明法　(離散数学の復習)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

- 仮定：頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して
  $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して
  $|E| = |V| - 1$ が成り立つ

証明の着想

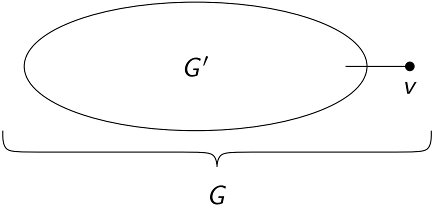


- 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．
- $k + 1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在．
- $G' = G - v$ として，G' に帰納法の仮定を適用．

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

- 仮定：頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して
  $$|E'| = |V'| - 1 \text{ が成り立つ}$$
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して
  $$|E| = |V| - 1 \text{ が成り立つ}$$

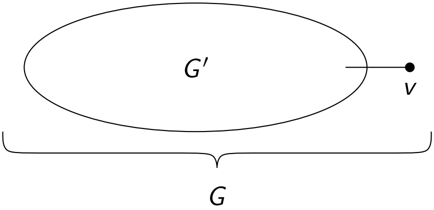
証明の着想



- 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．
- $k + 1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在．
- $G' = G - v$ として，G' に帰納法の仮定を適用．

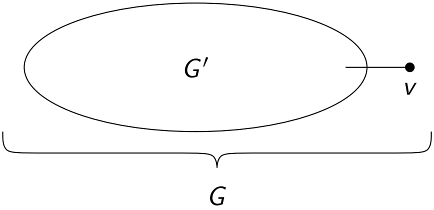
木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．



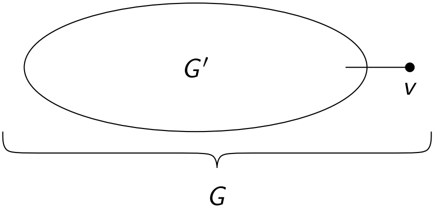
木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する． (証明済)



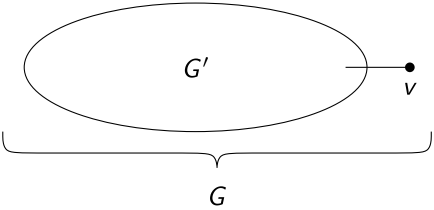
木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する． (証明済)
- $G' = G - v$ とすると，$G' = (V', E')$ も木である． (証明済)



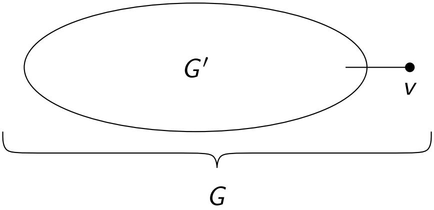
木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する．　(証明済)
- $G' = G - v$ とすると，$G' = (V', E')$ も木である．　(証明済)
- $|V'| = |V| - 1 = k$，かつ，$|E'| = |E| - 1$.



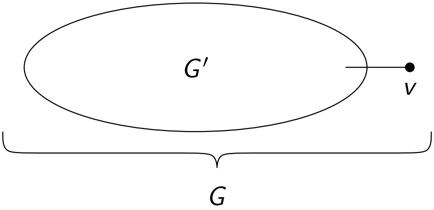
木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する． (証明済)
- $G' = G - v$ とすると，$G' = (V', E')$ も木である． (証明済)
- $|V'| = |V| - 1 = k$，かつ，$|E'| = |E| - 1$．
- 帰納法の仮定より，$|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ．



木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する．　(証明済)
- $G' = G - v$ とすると，$G' = (V', E')$ も木である．　(証明済)
- $|V'| = |V| - 1 = k$，かつ，$|E'| = |E| - 1$．
- 帰納法の仮定より，$|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ．
- したがって，$|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V'| = |V| - 1$．　□



木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い !! (または，不十分) — どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い !!（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える．(帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$)

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い !!（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える．(帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$)
- その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると，G も木である．

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い !!（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える．(帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$)
- その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると，G も木である．
- G の作り方から，$|E| = |E'| + 1$ と $|V| = |V'| + 1$ が成り立つ．

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い !!（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える．(帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$)
- その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると，G も木である．
- G の作り方から，$|E| = |E'| + 1$ と $|V| = |V'| + 1$ が成り立つ．
- したがって，$|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V| - 1$． □

〈余談〉数学的帰納法：どちらも正しいが，片方は「良い」，もう一方は「悪い」

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次を証明せよ

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

<u>証明 1 の帰納段階</u>

- $n = k$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ と仮定 (1)
- 証明したいこと：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ (2)
- (1) の左辺 $\displaystyle +k+1 = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i$
- (1) の右辺 $\displaystyle +k+1 = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$
- したがって，(2) の左辺 $=$ (2) の右辺 □

〈余談〉数学的帰納法：どちらも正しいが，片方は「良い」，もう一方は「悪い」

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次を証明せよ

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

証明 2 の帰納段階

- $n = k$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ と仮定 (1)
- 証明したいこと：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ (2)
- (2) の左辺 $\displaystyle = \sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$
  $\displaystyle = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) =$ (2) の右辺
- したがって，(2) の左辺 $=$ (2) の右辺 □

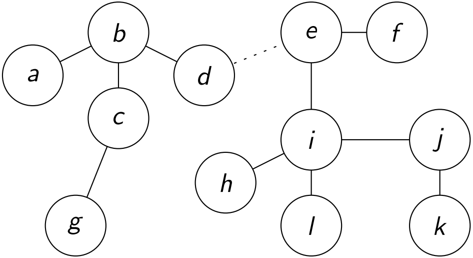
目次

木においてどの辺も切断辺である

木 $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である



証明：$|V|$ に関する帰納法.

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

木においてどの辺も切断辺である

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
e は G の切断辺である

証明：n に関する帰納法で証明する.

- $n = 1$ のとき，G は辺を持たないので，正しい.

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

木においてどの辺も切断辺である

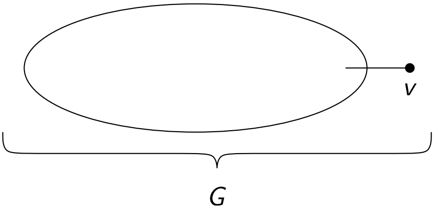
頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
e は G の切断辺である

証明：n に関する帰納法で証明する．

- $n = 1$ のとき，G は辺を持たないので，正しい．
- $n = k \geq 1$ として，
  頂点数 k の任意の木 $G' = (V', E')$ と任意の辺 $e' \in E'$ に対して
  e' が G' の切断辺であると仮定する．
- 証明すること：
  頂点数 $k + 1 \geq 2$ の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
  e が G の切断辺であること．

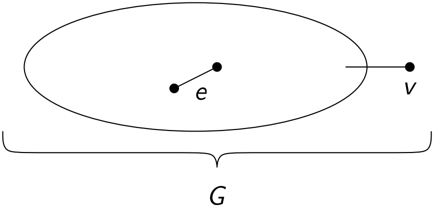
木においてどの辺も切断辺である：証明 (2)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉が存在する．
- その葉を v とする．
- 場合分け
  1. e が v に接続する辺ではない場合
  2. e が v に接続する辺である場合



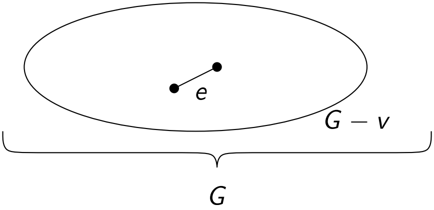
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である．



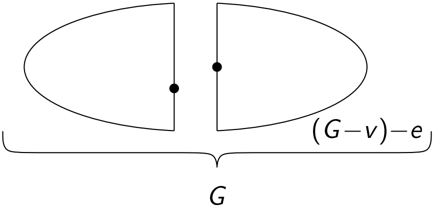
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G - v$ の辺である．



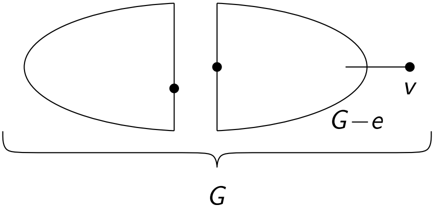
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G - v$ の辺である．
   - 帰納法の仮定から，e は $G - v$ の切断辺である．
     (すなわち，$(G - v) - e$ は非連結)



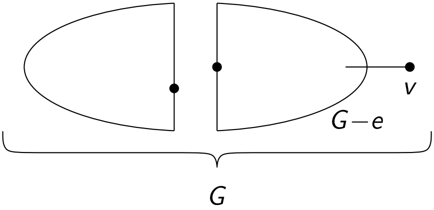
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G - v$ の辺である．
   - 帰納法の仮定から，e は $G - v$ の切断辺である．
     (すなわち，$(G - v) - e$ は非連結)
   - $G - e$ において，v の次数は 1 なので，$G - e$ も非連結



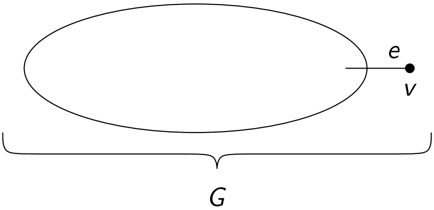
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G - v$ の辺である．
   - 帰納法の仮定から，e は $G - v$ の切断辺である．
     (すなわち，$(G - v) - e$ は非連結)
   - $G - e$ において，v の次数は 1 なので，$G - e$ も非連結
   - したがって，e は G の切断辺である．



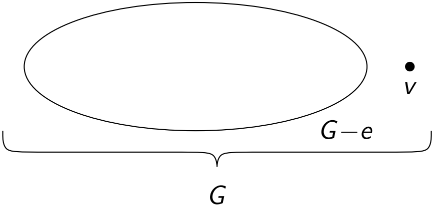
木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G-e$ において v は孤立点である．
     (つまり，$G-e$ は非連結．)



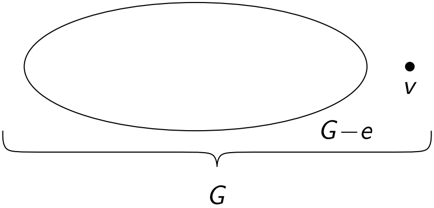
木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G - e$ において v は孤立点である．(つまり，$G - e$ は非連結．)



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

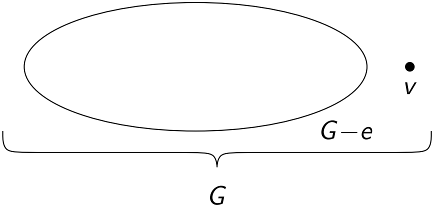
2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G-e$ において v は孤立点である．(つまり，$G-e$ は非連結．)
   - したがって，e は G の切断辺である．



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G-e$ において v は孤立点である．(つまり，$G-e$ は非連結．)
   - したがって，e は G の切断辺である．

どちらの場合においても，e は G の切断辺である． □

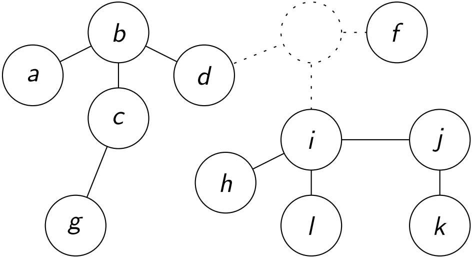


木において葉以外のどの頂点も切断点である

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，葉ではない頂点 $v \in V$

木において葉以外のどの頂点も切断点である

v は G の切断点である



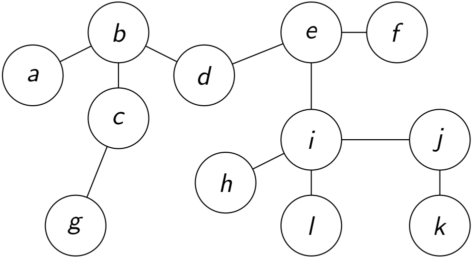
証明：演習問題 (ヒント：$|V|$ に関する帰納法)

木と道

木 $G = (V, E)$， $u, v \in V$

木の 2 点間を結ぶ道はただ 1 つ

G において u と v を結ぶ道はただ 1 つ存在する



証明：演習問題

目次

今日のまとめ

今日の目標

「木」を理解する

- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる

証明技法

- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

離散数学における証明手法

- 数え上げ論法 (前々回)
- 最大性論法／最小性論法 (前回)
- 数学的帰納法 (今回)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次