

グラフとネットワーク 第 1 回  
グラフの定義と次数：数理

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 4 月 13 日

最終更新：2015 年 4 月 9 日 15:24

## 概要

## 主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

## どんな問題を扱うのか：例1 — 優勝可能性の判定

## MLB アメリカンリーグ 東地区 1996年8月30日 金曜日

| チーム名 | 勝  | 敗  | 残  | NYN | BAL | BOS | TOR | DET | 他地区 |
|------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| NYN  | 75 | 59 | 28 | —   | 3   | 8   | 7   | 3   | 7   |
| BAL  | 71 | 63 | 28 | 3   | —   | 2   | 7   | 4   | 12  |
| BOS  | 69 | 66 | 27 | 8   | 2   | —   | 0   | 0   | 17  |
| TOR  | 63 | 72 | 27 | 7   | 7   | 0   | —   | 0   | 13  |
| DET  | 49 | 86 | 27 | 3   | 4   | 0   | 0   | —   | 20  |

NYN = ニューヨーク・ヤンキース, BAL = ボルティモア・オリオールズ,  
 BOS = ボストン・レッドソックス, TOR = トロント・ブルージェイズ,  
 DET = デトロイト・タイガース

## 優勝可能性判定問題

DETはまだ地区優勝が可能か？

(注：引き分けはない)

<http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html>

## どんな問題を扱うのか：例1 — 優勝可能性の判定

## MLB アメリカンリーグ 東地区 1996年8月30日 金曜日

| チーム名 | 勝  | 敗  | 残  | NYY | BAL | BOS | TOR | DET | 他地区 |
|------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| NYY  | 75 | 59 | 28 | —   | 3   | 8   | 7   | 3   | 7   |
| BAL  | 71 | 63 | 28 | 3   | —   | 2   | 7   | 4   | 12  |
| BOS  | 69 | 66 | 27 | 8   | 2   | —   | 0   | 0   | 17  |
| TOR  | 63 | 72 | 27 | 7   | 7   | 0   | —   | 0   | 13  |
| DET  | 49 | 86 | 27 | 3   | 4   | 0   | 0   | —   | 20  |

NYY = ニューヨーク・ヤンキース, BAL = ボルティモア・オリオールズ,  
 BOS = ボストン・レッドソックス, TOR = トロント・ブルージェイズ,  
 DET = デトロイト・タイガース

## 優勝可能性判定問題

DETはまだ地区優勝が可能か？

(注：引き分けはない)

⇒ 最大流

<http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html>

## どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

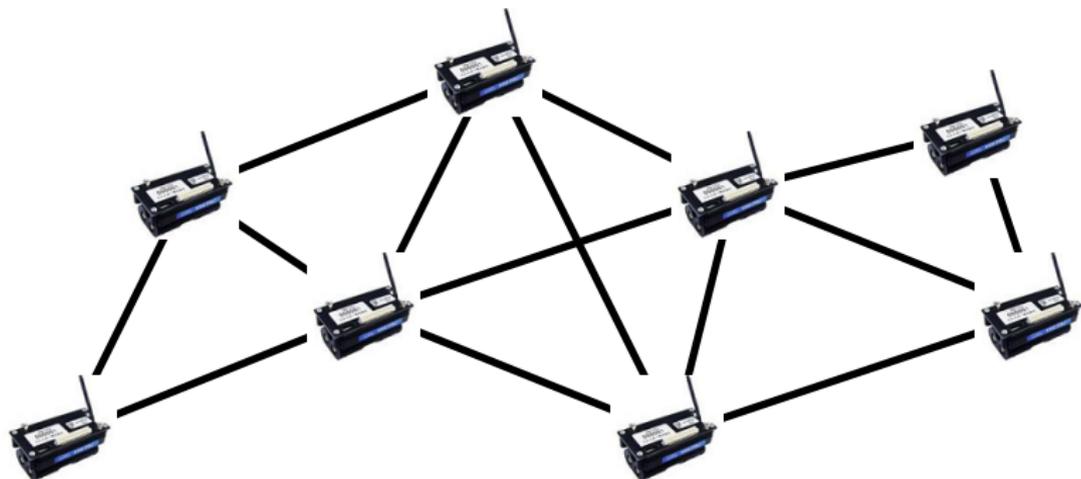


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

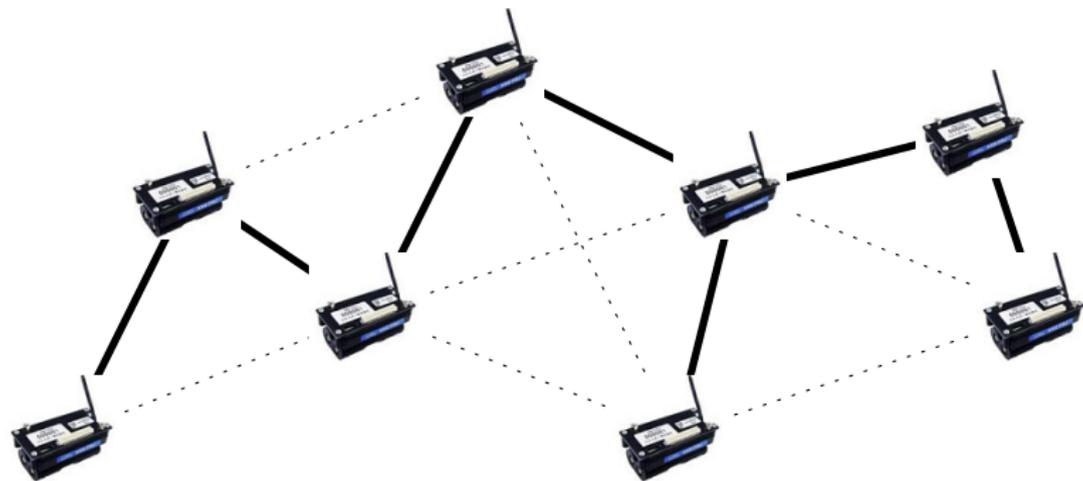


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

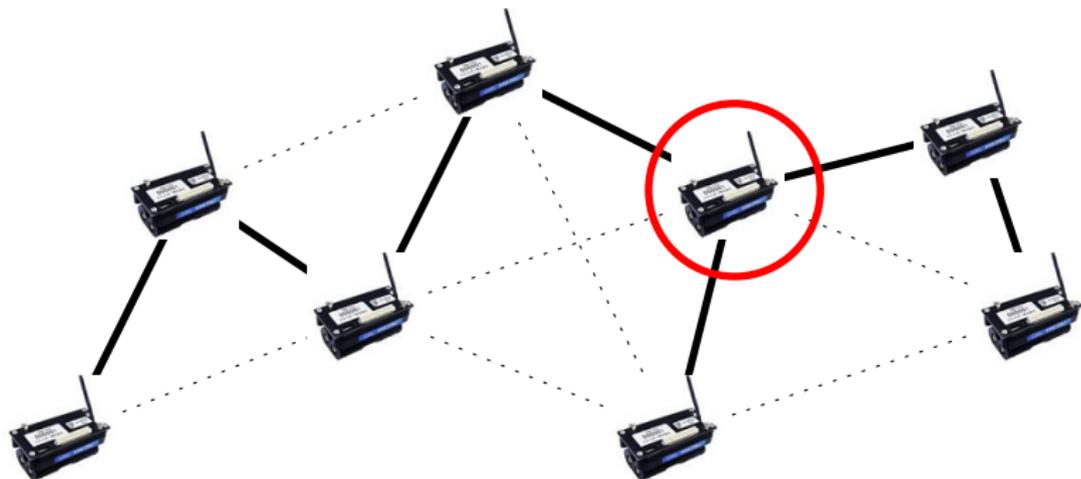


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

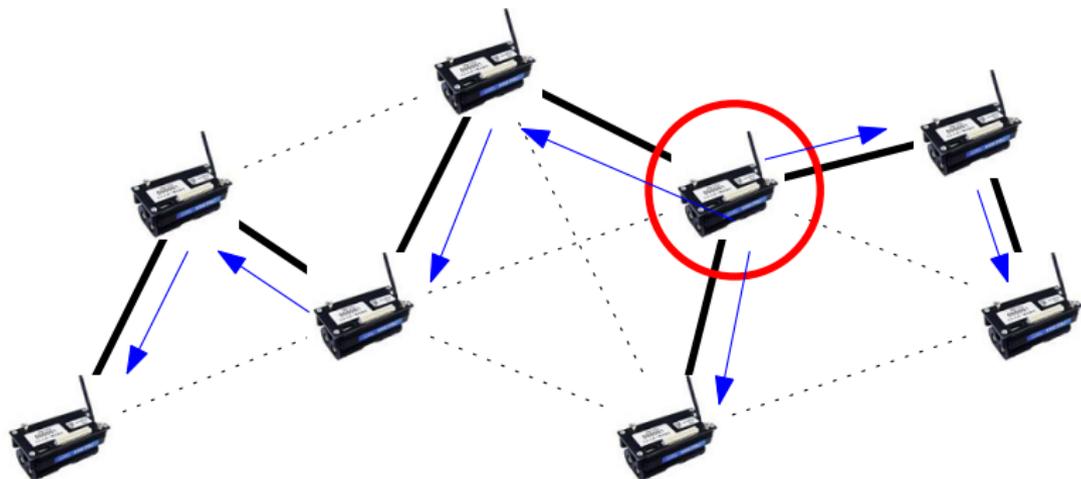


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

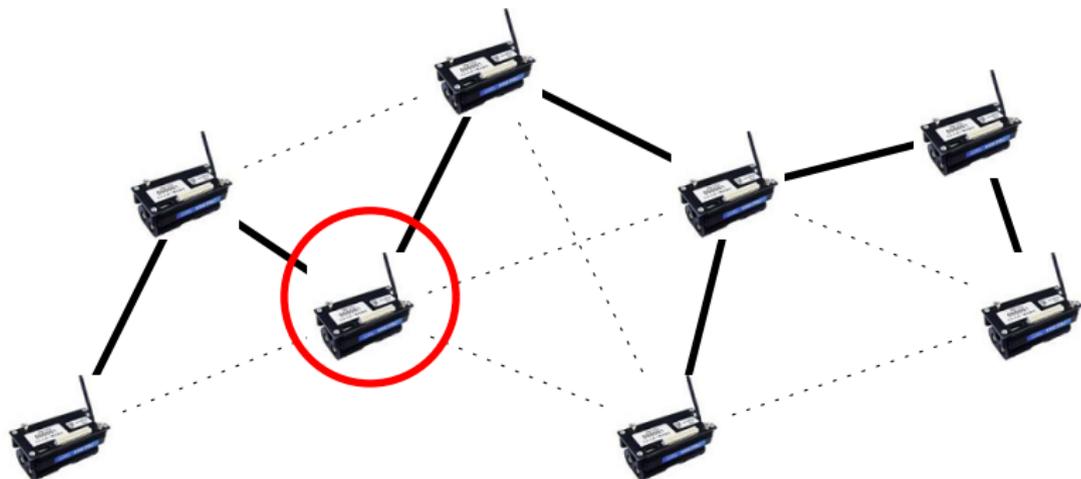


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

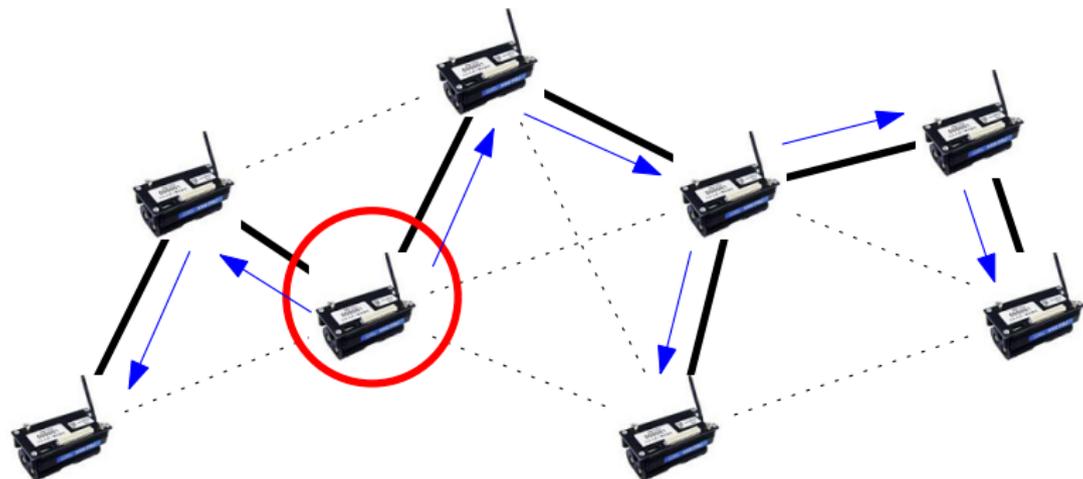


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

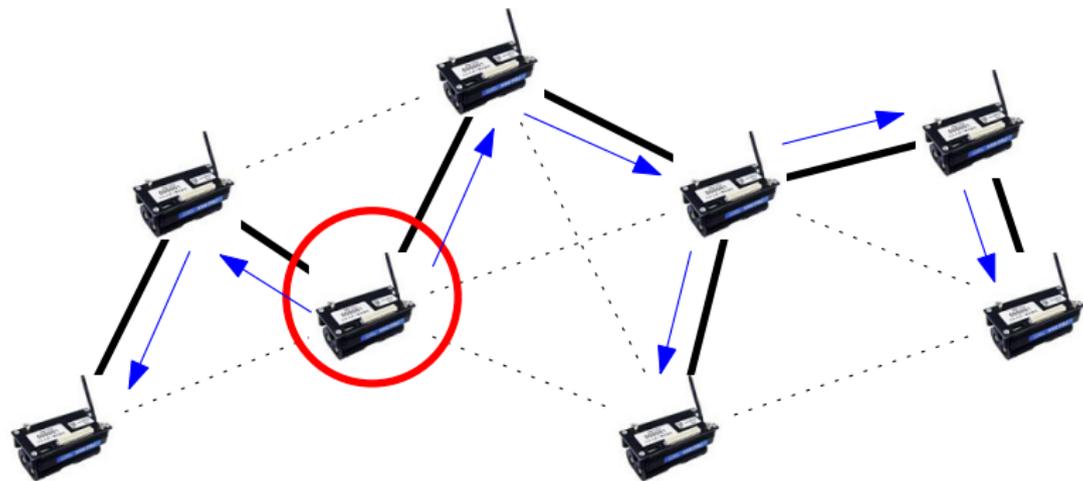


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？



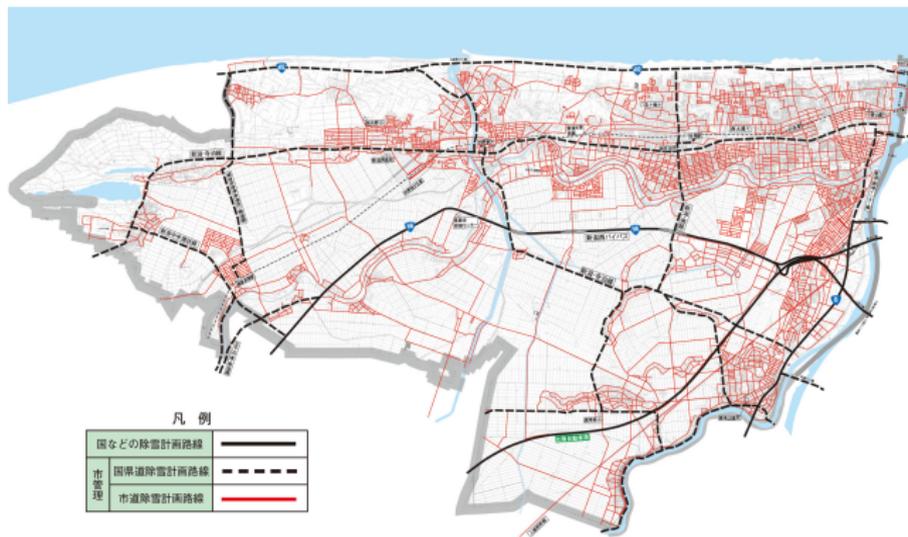
⇒ 全域木

<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

## どんな問題を扱うのか：例3 — 除雪計画

## 除雪計画

除雪車を効率よく運行するルートを決めたい

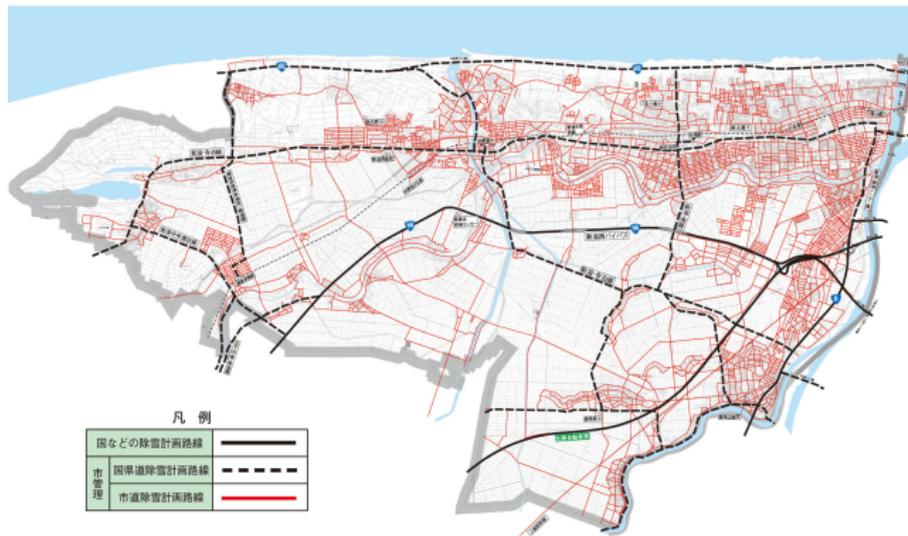


[https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi\\_1202/nishi\\_136\\_2.html](https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html)

## どんな問題を扱うのか：例3 — 除雪計画

## 除雪計画

除雪車を効率よく運行するルートを決めたい

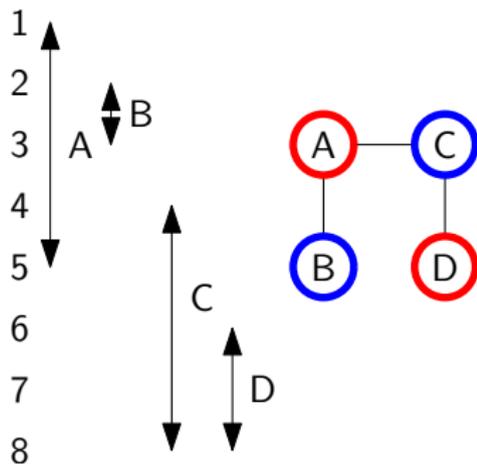


⇒ オイラー回路, マッチング

[https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi\\_1202/nishi\\_136\\_2.html](https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html)

## どんな問題を扱うのか：例 4 — コンパイラにおけるレジスタ割当

1:  $A = 2$   
 2:  $B = 3$   
 3:  $B = B + 2$   
 4:  $C = A + 1$   
 5:  $A = C + 3$   
 6:  $D = 4$   
 7:  $D = C + 2$   
 8:  $C = 3$

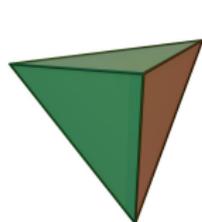


1:  $R1 = 2$   
 2:  $R2 = 3$   
 3:  $R2 = R2 + 2$   
 4:  $R2 = R1 + 1$   
 5:  $R1 = R2 + 3$   
 6:  $R1 = 4$   
 7:  $R1 = R2 + 2$   
 8:  $R2 = 3$

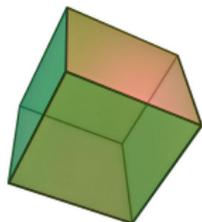
⇒ 彩色

## どんな問題を扱うのか：例5 — 正多面体 (3次元)

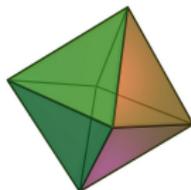
**正多面体**とは、各面が合同な正多角形であり、各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



正四面体



正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

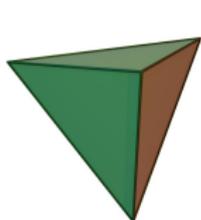
[http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)

## 疑問

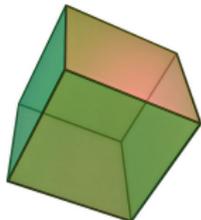
この5つの他に、正多面体はあるのか？

## どんな問題を扱うのか：例5 — 正多面体 (3次元)

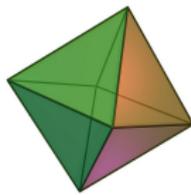
**正多面体**とは、各面が合同な正多角形であり、各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



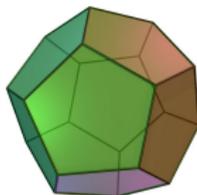
正四面体



正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

[http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)

## 疑問

この5つの他に、正多面体はあるのか？

## 解答

この5つの他に、正多面体は存在しない

⇒ 平面グラフ

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/13) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/20) |
| 3 | 木：数理         | (4/27) |
| * | みどりの日で休み     | (5/4)  |
| 4 | マッチング：数理     | (5/11) |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/16) |
| 6 | 最大流：数理       | (5/25) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (6/1)  |
| ● | 中間試験         | (6/8)  |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |              |         |
|----|--------------|---------|
| 8  | 最大流：モデル化 (2) | (6/15)  |
| 9  | 全域木：数理とモデル化  | (6/22)  |
| 10 | 彩色：数理        | (6/29)  |
| 11 | 彩色：モデル化      | (7/6)   |
| 12 | 平面グラフ：数理     | (7/13)  |
|    | * 海の日で休み     | (7/20)  |
| 13 | 平面グラフ：モデル化   | (7/27)  |
| 14 | 予備日 (講義は行う)  | (8/3)   |
|    | ● 期末試験       | (8/10?) |

注意：予定の変更もありうる

## 情報

## 教員

- ▶ 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- ▶ 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- ▶ E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

## ティーチング・アシスタント

- ▶ 高木 雄大 (たかぎ ゆうだい)
- ▶ 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

## 講義資料

- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2015/gn/
- ▶ 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- ▶ 講義の前の週の金曜の 18:00 までに、ここに置かれる

## 講義資料

<http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2015/gn/>

- ▶ スライド
- ▶ 印刷用スライド : 8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- ▶ 演習問題
- ▶ 用語一覧

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

## 授業の進め方

## 講義 (75 分)

- ▶ スライドと板書で進める
- ▶ スライドのコピーに重要事項のメモを取る

## 演習 (15 分)

- ▶ 演習問題に取り組む
- ▶ 不明な点は教員に質問する

## 退室 (0 分) ←重要

- ▶ コメント (授業の感想, 質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- ▶ コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

## オフィスアワー : 金曜 5 限

- ▶ 質問など
- ▶ ただし, いないときもあるので注意

## 演習問題

### 演習問題の進め方

- ▶ 授業のおわり 15 分は演習問題を解く時間
- ▶ 残った演習問題は復習・試験対策用
- ▶ 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

### 演習問題の種類

- ▶ 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- ▶ 補足問題：講義で省略した内容を補足
- ▶ 追加問題：講義の内容に追加
- ▶ 発展問題：少し難しい (かもしれない)

### 答案の提出

- ▶ 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- ▶ レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- ▶ レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- ▶ レポートにはコメントがつけられて、返却される
  - ▶ 返却された内容については、再提出ができる (再提出締切は原則なし)

## 評価

## 中間試験と期末試験による

## ▶ 出題形式

- ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
- ▶ その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし、「発展」として提示された演習問題は出題されない)
- ▶ 全問に解答する

▶ 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点

▶ 時間：90 分 (おそらく)

▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

## 成績評価

▶  $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$  による

## 格言

### 格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。  
「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

### 格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが、  
私 (岡本) が重要だと思うこと

### 格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは、授業に出て、演習問題を解くこと

## 教科書・参考書

## 教科書

- ▶ 指定しない

## 参考書

- ▶ 藤重悟,「グラフ・ネットワーク・組合せ論」, 共立出版, 2002.
- ▶ 繁野麻衣子,「ネットワーク最適化とアルゴリズム」, 朝倉書店, 2010.
- ▶ R.J. ウィルソン (著), 西関隆夫, 西関裕子 (訳),「グラフ理論入門 原書第4版」, 近代科学社, 2001.
- ▶ 茨木俊秀, 永持仁, 石井利昌,「グラフ理論」, 朝倉書店, 2010.
- ▶ など

## この講義の約束

- ▶ 私語はしない (ただし, 演習時間の相談は OK)
- ▶ 携帯電話等はマナーモードにする
- ▶ この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- ▶ 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

# 目次

## ① ネットワークの展覧会

## ② グラフとは？

## ③ グラフの次数

## ④ 今日のまとめ

今から紹介する例に共通すること

## 間違った認識

現実世界にはたくさんネットワークが存在する

## 正しい認識

現実世界にはたくさんネットワークと見なせることが存在する

- ▶ 「ネットワーク」としてモデル化している
- ▶ 「グラフ」はネットワークの数理モデルとして使われる

その他の例は今後の講義や他の講義の中で



## 道路ネットワーク



[http://en.wikipedia.org/wiki/File:International\\_E\\_Road\\_Network\\_green.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png)

## 輸送ネットワーク

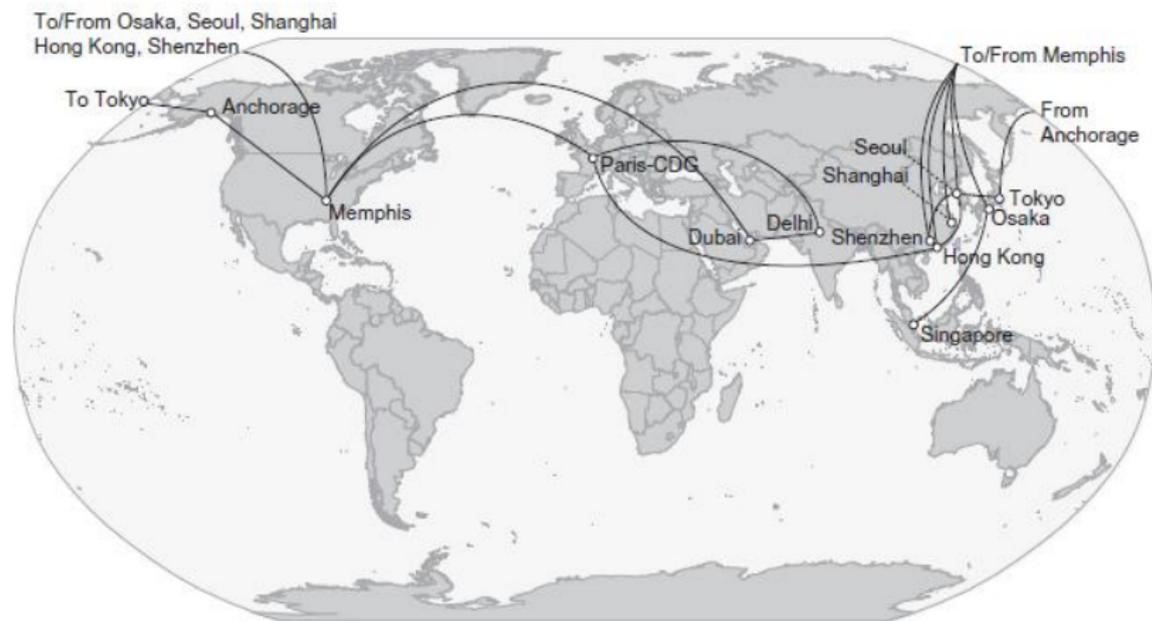
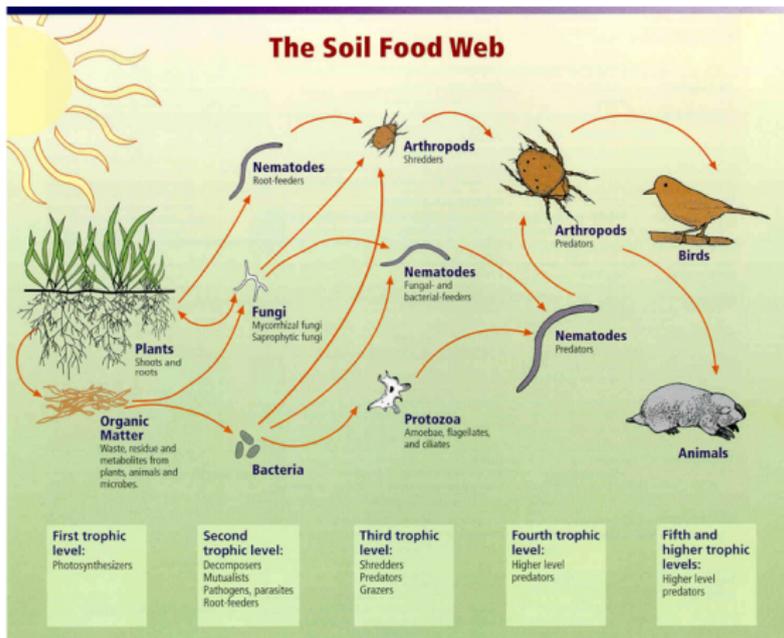


Fig. 8. FedEx Boeing 777-200LRF direct lanes. Source: FedEx (2011b).

J. T. Bowen Jr. (2012), *J. Trans. Geography*, 24, pp. 419–431

## 食物網

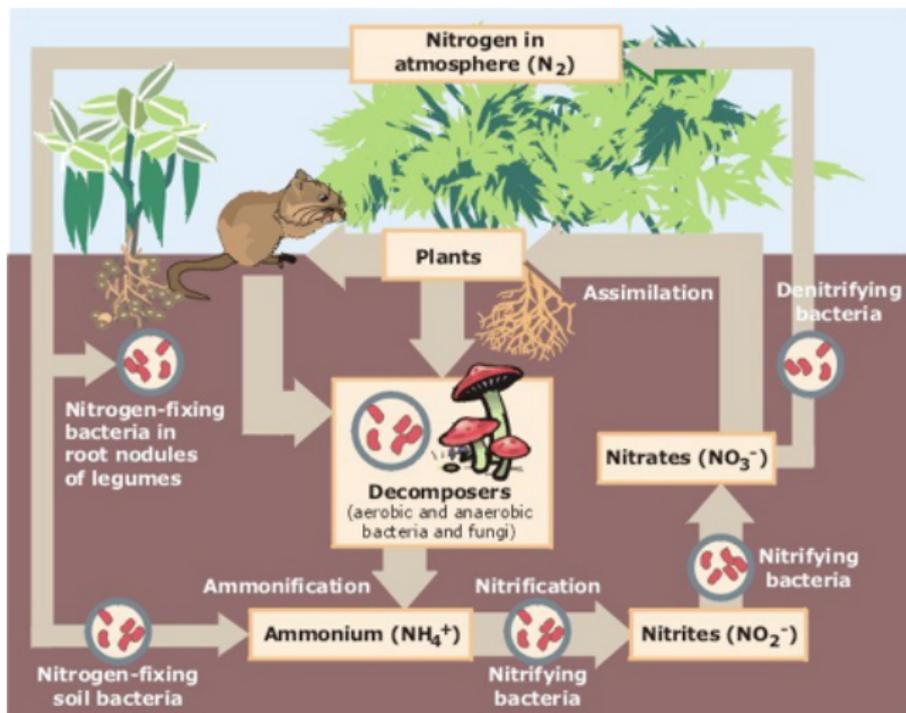


Relationships between soil food web, plants, organic matter, and birds and mammals

Image courtesy of USDA Natural Resources Conservation Service  
[http://soils.usda.gov/sqi/soil\\_quality/soil\\_biology/soil\\_food\\_web.html](http://soils.usda.gov/sqi/soil_quality/soil_biology/soil_food_web.html).

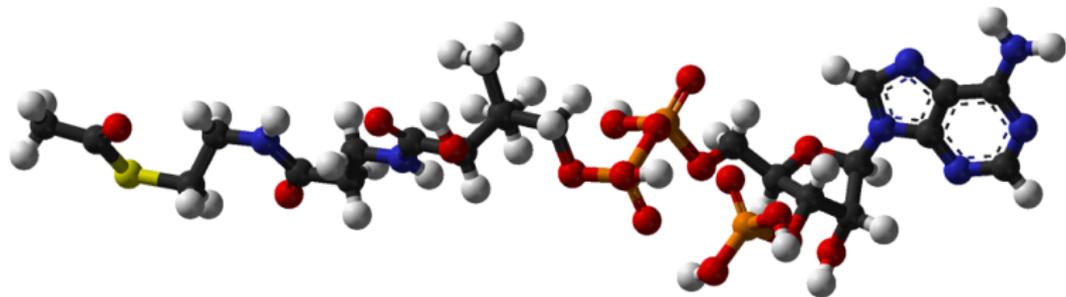
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soil\\_food\\_webUSDA.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soil_food_webUSDA.jpg)

## 窒素循環



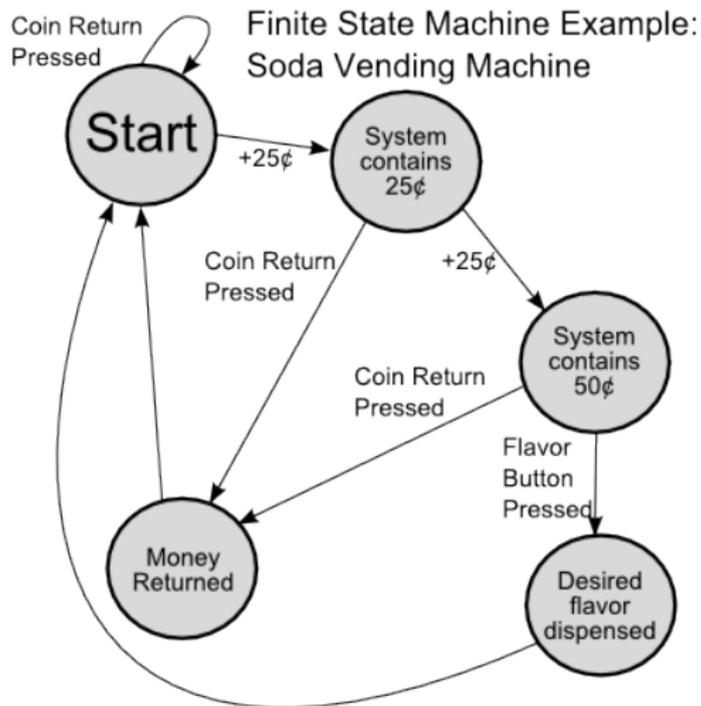
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nitrogen\\_Cycle.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nitrogen_Cycle.jpg)

## 分子模型

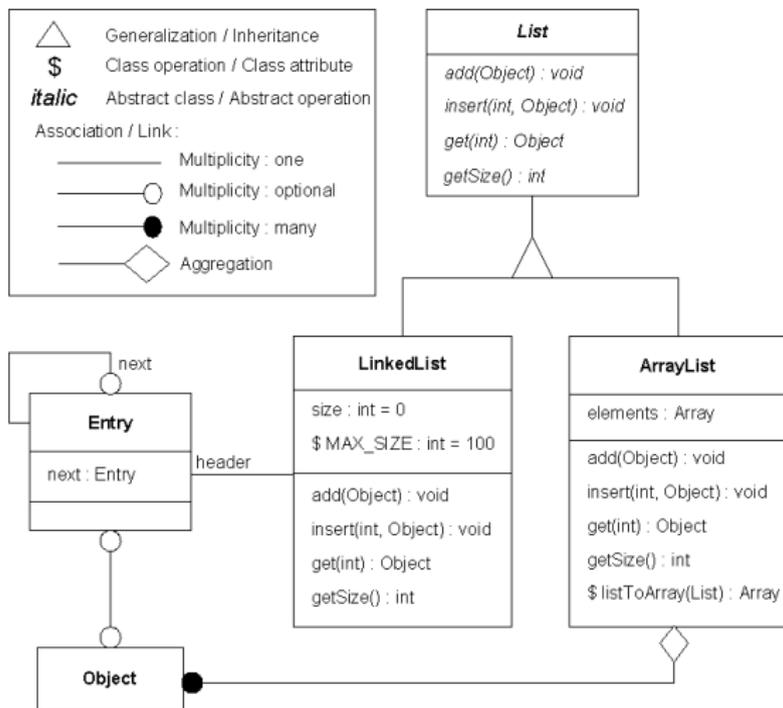


<https://en.wikipedia.org/wiki/Acetyl-CoA>

## 状態遷移図

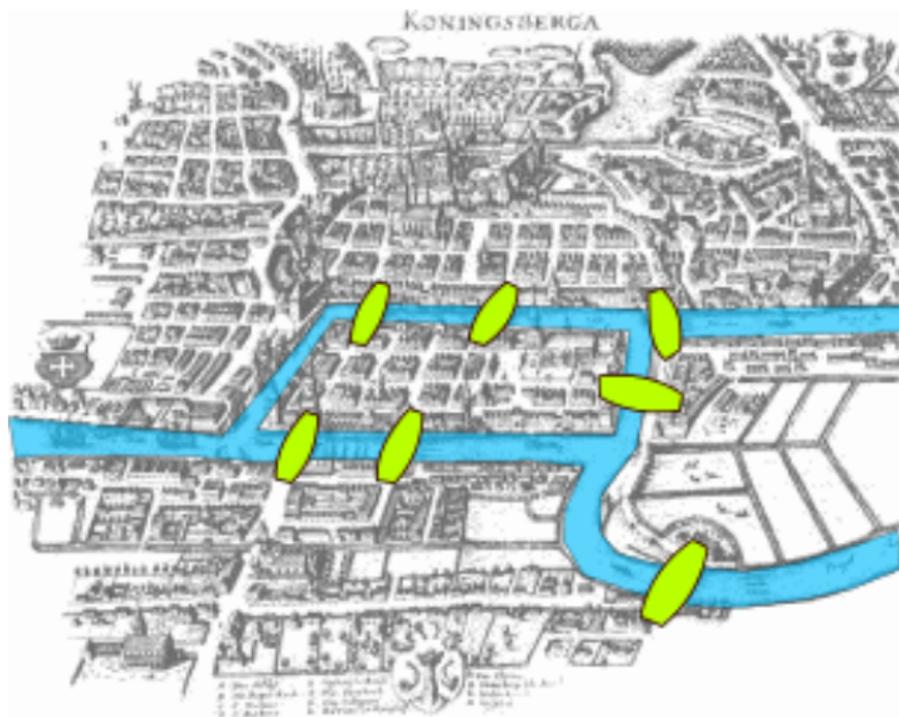


<http://automatown.org/automata>

オブジェクトモデル 

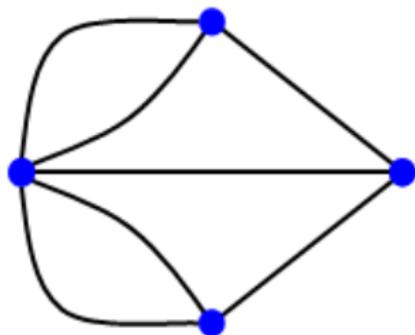
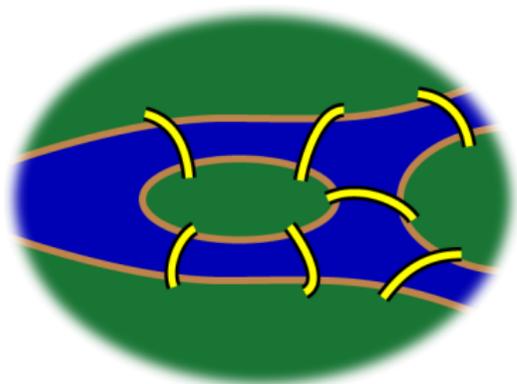
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:OMT\\_object\\_diagram.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:OMT_object_diagram.png)

## ケーニヒスベルクの橋の問題 (オイラー, 1735 年)



[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Koenigsberg\\_bridges.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Koenigsberg_bridges.png)

## ケーニヒスベルクの橋の問題：続き



[http://en.wikipedia.org/wiki/Seven\\_Bridges\\_of\\_Königsberg](http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg)

## 紹介した例に共通すること (再掲)

## 間違った認識

現実世界にはたくさんネットワークが存在する

## 正しい認識

現実世界にはたくさんネットワークと見なせることが存在する

- ▶ 「ネットワーク」としてモデル化している
- ▶ 「グラフ」はネットワークの数理モデルとして使われる

その他の例は今後の講義や他の講義の中で

## 目次

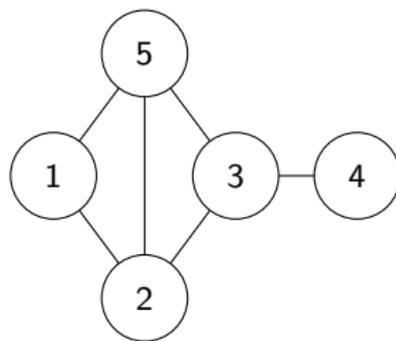
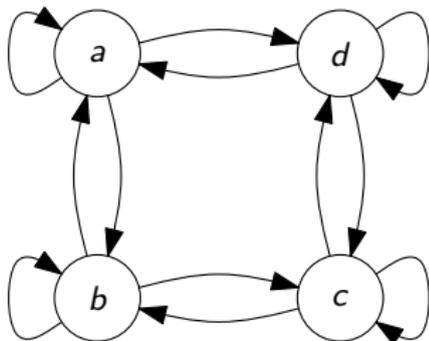
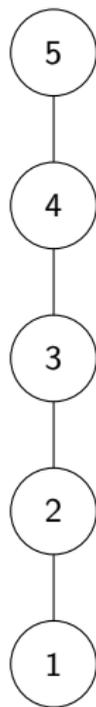
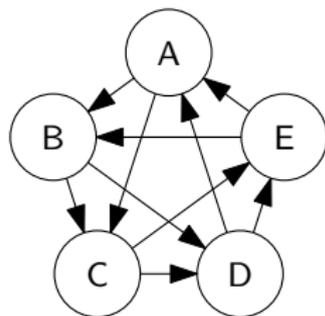
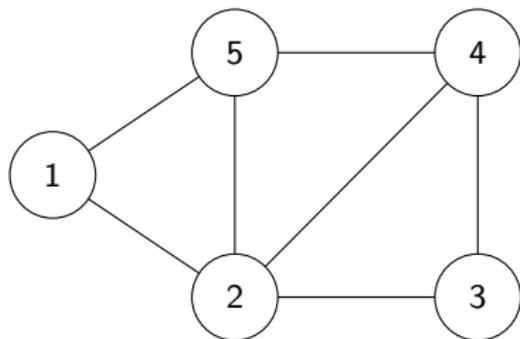
- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフとは？
- ③ グラフの次数
- ④ 今日のまとめ

## 概要

## 今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解する
- ▶ 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

# グラフの例



## 有向グラフ

## 有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対  $(V, A)$  で，

- ▶  $V$  は集合
- ▶  $A \subseteq V \times V$  は  $V$  の順序対の集合

であるもののこと

例：

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

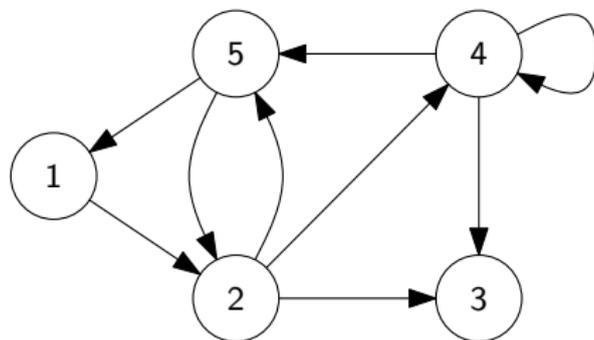
## 注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$

(順序対では順序が大事)

## 有向グラフの図示

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



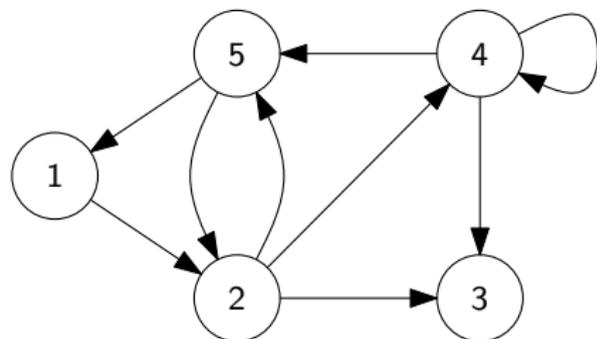
## 有向グラフの用語

有向グラフ  $G = (V, A)$ 

## 有向グラフの用語

- ▶  $V$  の要素を  $G$  の頂点と呼ぶ
- ▶  $V$  を  $G$  の頂点集合と呼ぶ
- ▶ 弧  $(u, v) \in A$  に対して、 $u$  はその始点であり、 $v$  はその終点である
- ▶  $A$  の要素を  $G$  の弧と呼ぶ
- ▶  $A$  を  $G$  の弧集合と呼ぶ

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- ▶ 頂点 2 は弧  $(2, 3)$  の始点、  
頂点 3 は弧  $(2, 3)$  の終点



## 無向グラフ

## 無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対  $(V, E)$  で，

- ▶  $V$  は集合
- ▶  $E \subseteq 2^V$  は  $V$  の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

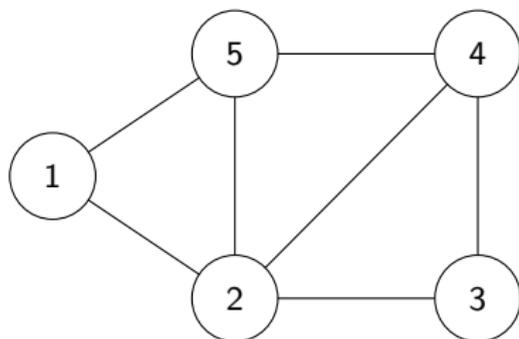
## 注意

$$\{2, 5\} = \{5, 2\}$$

(集合では順序を不問)

## 無向グラフの図示

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



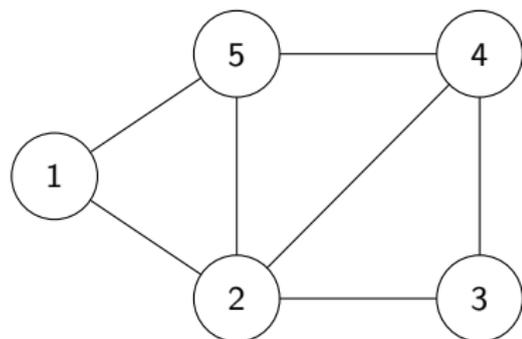
## 無向グラフの用語

無向グラフ  $G = (V, E)$

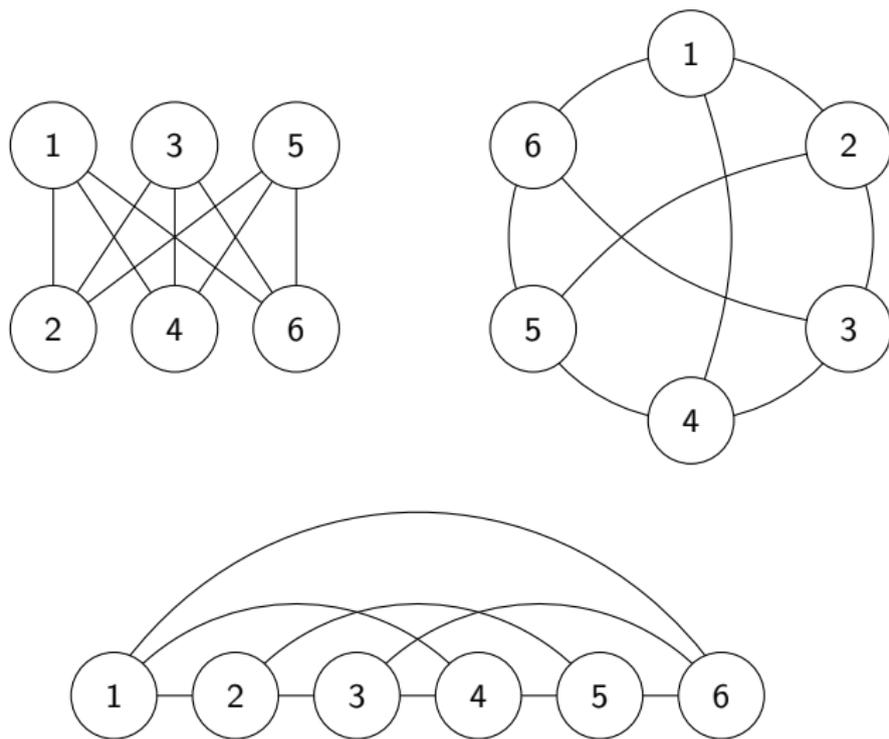
## 無向グラフの用語

- ▶  $V$  の要素を  $G$  の**頂点**と呼ぶ
- ▶  $V$  を  $G$  の**頂点集合**と呼ぶ
- ▶ 辺  $\{u, v\} \in E$  に対して,  $u, v$  をその**端点**と呼ぶ
- ▶ 頂点  $v$  が辺  $e$  の端点であるとき,  $v$  は  $e$  に**接続**するという
- ▶ 頂点  $u$  と  $v$  が辺を成すとき,  $u$  と  $v$  は**隣接**するという

- ▶  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▶ 頂点 2, 3 は辺  $\{2, 3\}$  の端点
- ▶ 頂点 2 は辺  $\{2, 3\}$  に接続する
- ▶ 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



# 1つのグラフに対するいろいろな図示



## 用語に関する注意

## 有向グラフ

- ▶ 「頂点」の別名：「節点」, 「ノード」, 「点」
- ▶ 「弧」の別名：「辺」, 「有向辺」, 「アーク」, 「エッジ」

## 無向グラフ

- ▶ 「頂点」の別名：「節点」, 「ノード」, 「点」
- ▶ 「辺」の別名：「無向辺」, 「エッジ」

## 目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフとは？
- ③ グラフの次数**
- ④ 今日のまとめ

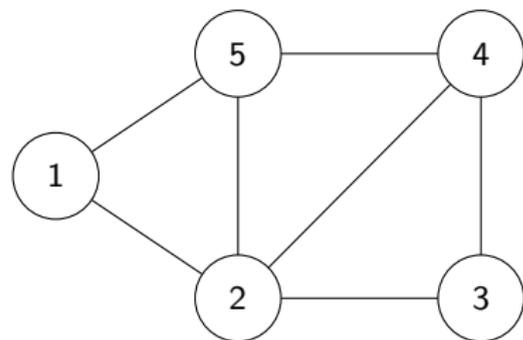
## 無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 頂点  $v \in V$

頂点  $v$  の次数とは？

頂点  $v \in V$  の**次数**とは,  $v$  に接続する辺の数のこと

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid \exists u \in V (e = \{u, v\})\}|$$

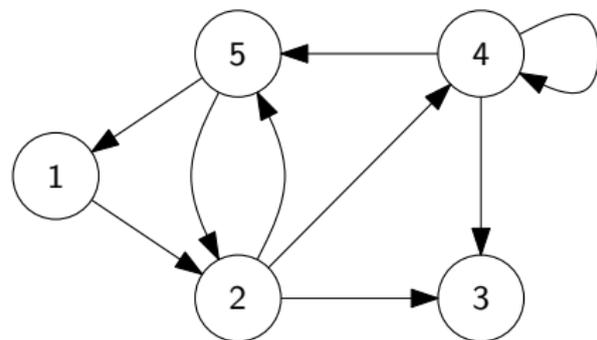


- ▶  $\deg_G(1) = 2$
- ▶  $\deg_G(2) = 4$
- ▶  $\deg_G(3) = 2$
- ▶  $\deg_G(4) = 3$
- ▶  $\deg_G(5) = 3$

## 有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 頂点  $v \in V$ 頂点  $v$  の入次数とは？頂点  $v \in V$  の入次数とは,  $v$  を終点とする弧の数のこと

$$\deg_G^-(v) = |\{a \in A \mid \exists u \in V (a = (u, v))\}|$$

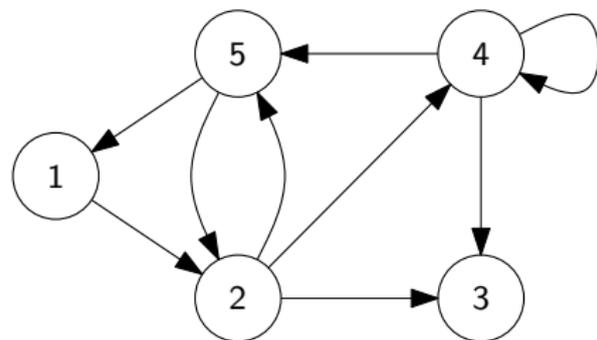


- ▶  $\deg_G^-(1) = 1$
- ▶  $\deg_G^-(2) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(3) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(4) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(5) = 2$

## 有向グラフにおける頂点の次数

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 頂点  $v \in V$ 頂点  $v$  の次数とは？頂点  $v \in V$  の**出次数**とは,  $v$  を始点とする弧の数のこと

$$\deg_G^+(v) = |\{a \in A \mid \exists u \in V (a = (v, u))\}|$$



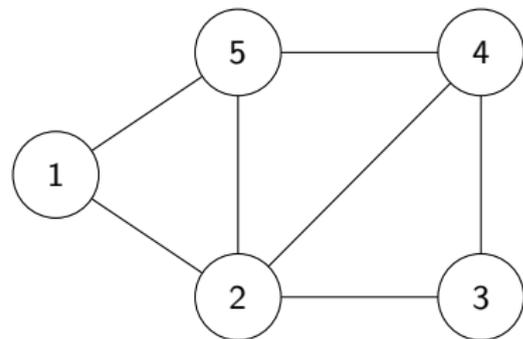
- ▶  $\deg_G^+(1) = 2$
- ▶  $\deg_G^+(2) = 4$
- ▶  $\deg_G^+(3) = 1$
- ▶  $\deg_G^+(4) = 2$
- ▶  $\deg_G^+(5) = 2$

## 握手補題

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- ▶  $\deg_G(1) = 2$
- ▶  $\deg_G(2) = 4$
- ▶  $\deg_G(3) = 2$
- ▶  $\deg_G(4) = 3$
- ▶  $\deg_G(5) = 3$
- ▶  $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- ▶  $|E| = 7$

## 握手補題の証明：準備 (直感)

- ▶  $G$  の各頂点の周りを見て、  
接続する辺の上に石を置く
- ▶ 石の総数を計算する

数え方 1

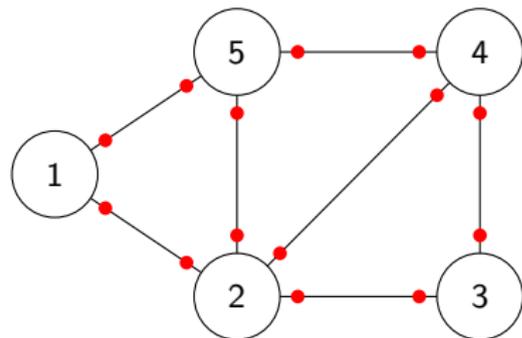
- ▶ 頂点  $v$  の周りの石の数 =  $\deg_G(v)$
- ▶  $\therefore$  石の総数 =  $\sum_{v \in V} \deg_G(v)$

数え方 2

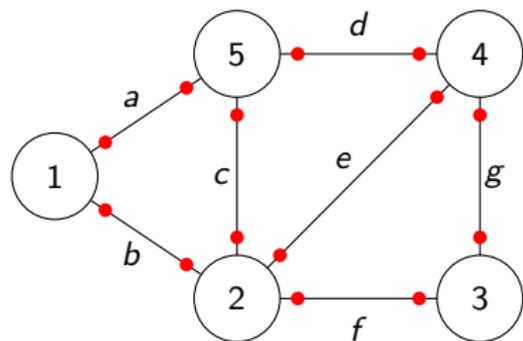
- ▶ 各辺  $e$  上の石の数 = 2
- ▶  $\therefore$  石の総数 =  $\sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

- ▶  $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \text{石の総数} = 2|E|$

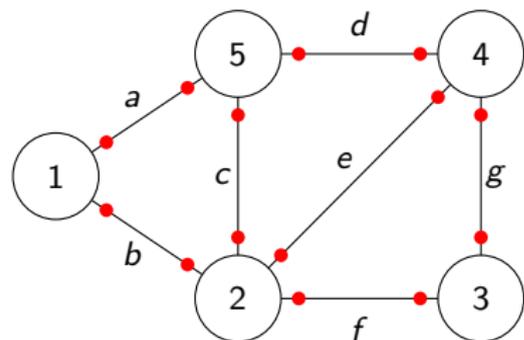


## 握手補題の証明：準備 (行列)



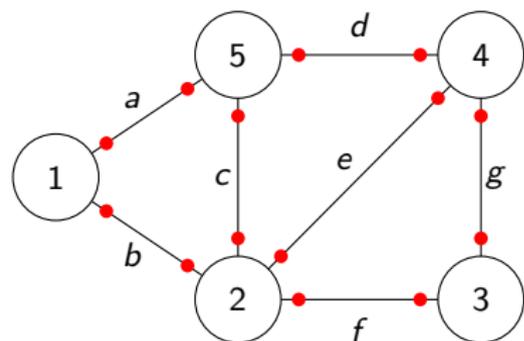
|     |   | $E$ |     |     |     |     |     |     |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
| $V$ | 1 | 1   | 1   |     |     |     |     |     |
|     | 2 |     | 1   | 1   |     | 1   | 1   |     |
|     | 3 |     |     |     |     |     | 1   | 1   |
|     | 4 |     |     |     | 1   | 1   |     | 1   |
|     | 5 | 1   |     | 1   | 1   |     |     |     |

## 握手補題の証明：準備 (行列)



|     |   | $E$ |     |     |     |     |     |     |               |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------|
|     |   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |               |
| $V$ | 1 | 1   | 1   |     |     |     |     |     | $= \deg_G(1)$ |
|     | 2 |     | 1   | 1   |     | 1   | 1   |     | $= \deg_G(2)$ |
|     | 3 |     |     |     |     |     | 1   | 1   | $= \deg_G(3)$ |
|     | 4 |     |     |     | 1   | 1   |     | 1   | $= \deg_G(4)$ |
|     | 5 | 1   |     | 1   | 1   |     |     |     | $= \deg_G(5)$ |

握手補題の証明：準備 (行列)



|     |   | $E$     |         |         |         |         |         |         |               |
|-----|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|
|     |   | $a$     | $b$     | $c$     | $d$     | $e$     | $f$     | $g$     |               |
| $V$ | 1 | 1       | 1       |         |         |         |         |         | $= \deg_G(1)$ |
|     | 2 |         | 1       | 1       |         | 1       | 1       |         | $= \deg_G(2)$ |
|     | 3 |         |         |         |         |         | 1       | 1       | $= \deg_G(3)$ |
|     | 4 |         |         |         | 1       | 1       |         | 1       | $= \deg_G(4)$ |
|     | 5 | 1       |         | 1       | 1       |         |         |         | $= \deg_G(5)$ |
|     |   | $\cong$ |               |

## 握手補題の証明

$G = (V, E)$  は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列  $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$  と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ したがって,  $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$



## 握手補題の証明

$G = (V, E)$  は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列  $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$  と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ 任意の頂点  $v \in V$  に対して,  $v$  を端点とする辺の数は  $\deg_G(v)$  なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- ▶ したがって,  $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$



## 握手補題の証明

$G = (V, E)$  は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列  $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$  と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ 任意の頂点  $v \in V$  に対して,  $v$  を端点とする辺の数は  $\deg_G(v)$  なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- ▶ 任意の辺  $e \in E$  に対して,  $e$  の端点の数は 2 なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \left( \sum_{v \in V} M_{v,e} \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

- ▶ したがって,  $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$

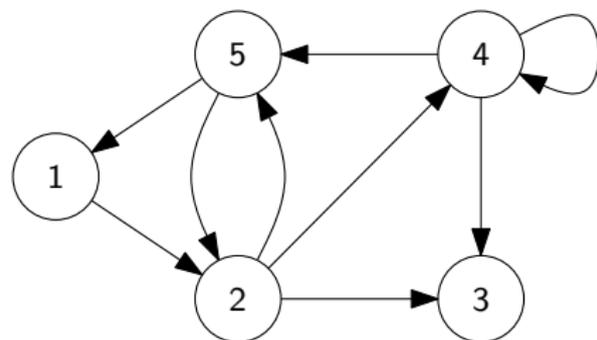
□

## 有向グラフに対する握手補題

有向グラフ  $G = (V, A)$ 

## 有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \quad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- ▶  $\deg_G^-(1) = 1$
- ▶  $\deg_G^-(2) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(3) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(4) = 2$
- ▶  $\deg_G^-(5) = 2$
- ▶  $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- ▶  $|A| = 9$

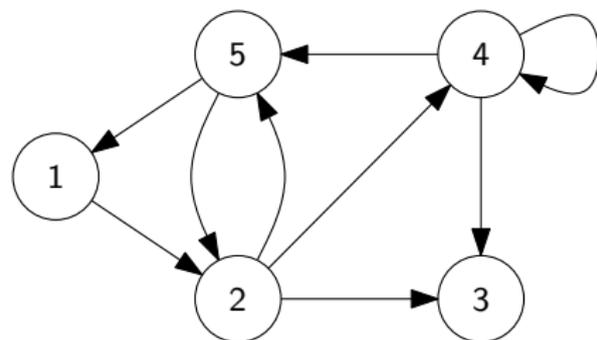
証明 : 演習問題

## 有向グラフに対する握手補題

有向グラフ  $G = (V, A)$ 

## 有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \quad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- ▶  $\deg_G^+(1) = 2$
- ▶  $\deg_G^+(2) = 3$
- ▶  $\deg_G^+(3) = 1$
- ▶  $\deg_G^+(4) = 2$
- ▶  $\deg_G^+(5) = 2$
- ▶  $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = 2 + 3 + 1 + 2 + 2 = 10$
- ▶  $|A| = 10$

証明 : 演習問題

## 無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

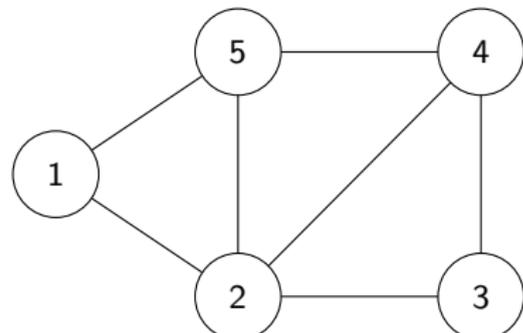
最大次数, 最小次数とは?

 $G$  の最大次数とは,  $G$  の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

 $G$  の最小次数とは,  $G$  の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



▶  $\deg_G(1) = 2$

▶  $\deg_G(2) = 4$

▶  $\deg_G(3) = 2$

▶  $\deg_G(4) = 3$

▶  $\deg_G(5) = 3$

▶  $\Delta(G) = 4$

▶  $\delta(G) = 2$

## 有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ  $G = (V, E)$ 

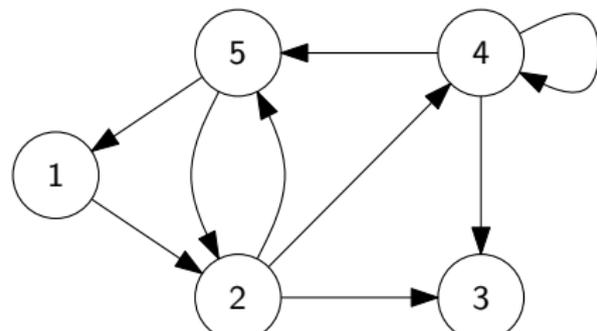
最大入次数, 最小入次数とは?

 $G$  の最大入次数とは,  $G$  の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$

 $G$  の最小入次数とは,  $G$  の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$



▶  $\deg_G^-(1) = 1$

▶  $\deg_G^-(2) = 2$

▶  $\deg_G^-(3) = 2$

▶  $\deg_G^-(4) = 2$

▶  $\deg_G^-(5) = 2$

▶  $\Delta^-(G) = 2$

▶  $\delta^-(G) = 1$

## 有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ  $G = (V, E)$ 

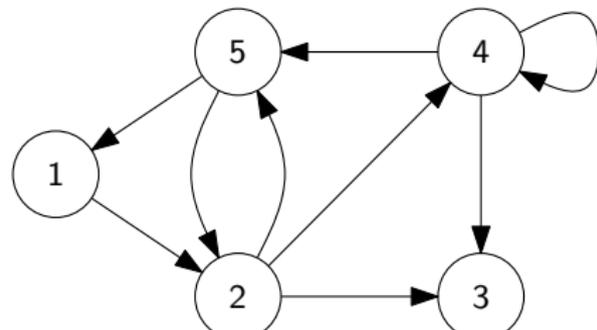
最大出次数, 最小出次数とは?

 $G$  の最大出次数とは,  $G$  の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$

 $G$  の最小出次数とは,  $G$  の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$



▶  $\deg_G^+(1) = 1$

▶  $\deg_G^+(2) = 3$

▶  $\deg_G^+(3) = 0$

▶  $\deg_G^+(4) = 3$

▶  $\deg_G^+(5) = 2$

▶  $\Delta^+(G) = 3$

▶  $\delta^+(G) = 0$

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より,  $G$  の平均次数は  $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$ .

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より,  $G$  の平均次数は  $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$ .
- ▶ 最小次数は平均次数以下なので,  $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$ .

## 格言

最小値  $\leq$  平均値  $\leq$  最大値

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より,  $G$  の平均次数は  $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$ .
- ▶ 最小次数は平均次数以下なので,  $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$ .
- ▶ 最大次数は平均次数以上なので,  $\Delta(G) \geq \frac{2|E|}{|V|}$ . □

## 格言

最小値  $\leq$  平均値  $\leq$  最大値

## 最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 帰結

- 1 ある頂点  $v \in V$  が存在して,  $\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
- 2 ある頂点  $v \in V$  が存在して,  $\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明 :

## 最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 帰結

- 1 ある頂点  $v \in V$  が存在して,  $\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
- 2 ある頂点  $v \in V$  が存在して,  $\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明 :

- 1  $v$  として最大次数を持つ頂点を考えればよい.
- 2  $v$  として最小次数を持つ頂点を考えればよい.

# 目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフとは？
- ③ グラフの次数
- ④ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解する
- ▶ 数え上げによる証明の手法を理解し、使えるようになる

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフとは？
- ③ グラフの次数
- ④ 今日のまとめ