グラフとネットワーク 第 14 回
ラムゼー理論

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 8 月 3 日

最終更新：2015 年 7 月 31 日　08:11

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)
* みどりの日で休み (5/4)
4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)
- 中間試験 (6/8)

スケジュール 後半

8. 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9. 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10. 彩色：数理 (6/29)
11. 彩色：モデル化 (7/6)
12. 平面グラフ：数理 (7/13)
* 海の日で休み (7/20)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14. ラムゼー理論 (8/3)
- 期末試験 (@西 5-209) (8/10)

期末試験 (前回のアナウンスと同じ)

- 日時，場所：8 月 10 日 (月) 2 限 @ 西 5 号館 209 教室
- 出題範囲
  - 第 7 回講義 (6/1) から第 13 回講義 (7/27) の資料，演習
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点， 計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- min{100, 中間試験の素点 + 期末試験の素点 } による

概要

今日の目標

ラムゼー理論の基礎を理解する

- グラフのラムゼー数
- ラムゼー理論に関わるゲーム

目次

Frank P. Ramsey

イギリスの思想家，経済学者 (1903–1930)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Frank_Plumpton_Ramsey.JPG

ラムゼー理論とは？

D. West の本 ('01) からの引用 (の試訳)

「ラムゼー理論」とは大きな構造の分割に関する研究を指す．典型的な結果は，分割のある類に特殊な部分構造が必ず生起するというものである．モツキンは「完全な無秩序は不可能である」ということばでこれを表現した．我々が考える対象は単に集合や数であり，…

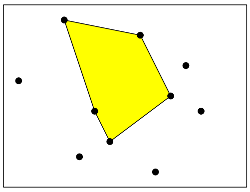
原文："Ramsey theory" refers to the study of partitions of large structures. Typical results state that a special substructure must occur in some class of the partition. Motzkin described this by saying that "Complete disorder is impossible." The objects we consider are merely sets and numbers, …

格言

物理学に「物理学的現象」，生物学に「生物学的現象」があるように
数学にも「数学的現象」が存在する

ちょっとした例

平面上に，どの 3 点も一直線上にのらないように 10 点置く



必ず，そこには (中に他の点を含まない) 凸五角形が現れる
(Harborth '78)

集合の 2 分割

有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$，自然数 a, b，$n = a + b - 1$

観察

X の任意の 2 分割 $X = X_1 \cup X_2$ に対して (ただし，$X_1 \cap X_2 = \emptyset$)

$$|X_1| \geq a \quad \text{または} \quad |X_2| \geq b$$

が成り立つ

証明：演習問題

今から行うこと

- 集合の分割に対する観察をグラフに対して行う
- 特に，完全グラフの辺集合を分割する

目次

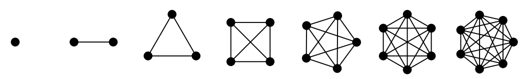
復習：完全グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

完全グラフとは？

G が完全グラフであるとは，V のどの 2 頂点も辺で結ばれていること

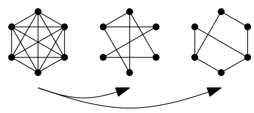
頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

完全グラフの辺集合の分割

K_6 の辺集合を 2 分割して，2 つのグラフを得る



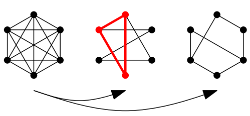
K_6 に対するラムゼー理論

K_6 に対するラムゼー理論

K_6 の辺集合を任意に 2 分割してできたグラフ G_1, G_2 において

$$G_1 \text{ が } K_3 \text{ を含む} \quad \text{または} \quad G_2 \text{ が } K_3 \text{ を含む}$$

が成り立つ

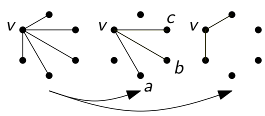


比喩的に，次のような言われ方もする

6 人出席者のいるパーティーでは，互いに知り合いである 3 人組か，
互いに知り合いではない 3 人組が必ず存在する

K_6 に対するラムゼー理論：証明 (1)

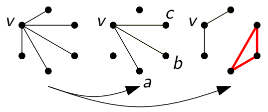
- K_6 の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は 5 つ存在
- その中の 3 つは G_1 か G_2 に存在 (補足：集合の 2 分割)
- この 3 つが G_1 に存在する場合を考える
  (G_2 に存在する場合も同様)
- その 3 辺に接続する v 以外の頂点を a, b, c とする



K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき
- a, b, c を頂点集合とする K_3 が G_2 に含まれる

場合 2：そうではないとき
- a, b, c を結ぶ辺の 1 つは G_1 に含まれる
- それを $\{a, b\}$ であるとする (他の場合も同様)
- a, b, v を頂点とする K_3 が G_1 に含まれる □



グラフに対するラムゼー理論とは？

グラフに対するラムゼー理論とは？
- 完全グラフの辺集合を分割して，グラフ $G_1, \ldots, G_r$ を得る
- このとき，その中のどれかがある大きさの完全グラフを含む

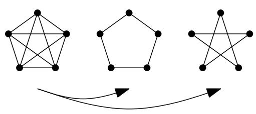
先ほどの例
- 頂点数 6 の完全グラフの辺集合を 2 分割
- このとき，どちらかが頂点数 3 の完全グラフを含む

注意

頂点数 6 の完全グラフの辺集合 2 分割でこれが成り立つので，
頂点数 7, 8, 9,... の完全グラフの辺集合を 2 分割しても
どちらかは頂点数 3 の完全グラフを必ず含む

頂点数 5 だとどうか？

K_5 の辺集合を 2 分割しても K_3 は含まれないかもしれない



この意味で,「6」が極値になっている

目次

ラムゼー数

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k, \ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような最小の n

先ほどの場合に対応するのは：$R(3, 3) = 6$
- $\boxed{R(3,3) \le 6}$：
  K_6 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ると
  「G_1 が K_3 を含む，または，G_2 が K_3 を含む」が成り立つ
- $\boxed{R(3,3) \ge 6}$：
  K_5 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 をうまく作ると
  「G_1 が K_3 を含まず，かつ，G_2 が K_3 を含まない」が成り立つ

ラムゼー数の上界と下界

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k, \ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような最小の n

$R(k, \ell) = N$ を証明するには…
- $\boxed{R(k,\ell) \le N \text{ の証明}}$：
  K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ると
  「G_1 が K_k を含む，または，G_2 が K_ℓ を含む」が成り立つ
- $\boxed{R(k,\ell) \ge N}$：
  K_{N-1} の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 をうまく作ると
  「G_1 が K_k を含まず，かつ，G_2 が K_ℓ を含まない」が成り立つ

ラムゼー数に対する疑問

疑問

任意の自然数 k, ℓ に対して，十分に大きな N を考えると
K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

は成り立つのか？

疑問：別の言い方

任意の自然数 k, ℓ に対して，$R(k, \ell)$ は存在するのか？

ラムゼー数の存在性

グラフに対するラムゼーの定理

任意の自然数 k, ℓ に対して，ある自然数 N が存在して
K_N の辺集合を 2 分割して G_1, G_2 を任意に作ると

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つ

わざわざ難しく書くと
- $\forall$ 自然数 k, ℓ
- $\exists$ 自然数 N
- $\forall$ K_N の辺集合の 2 分割から作られる G_1, G_2：
- G_1 が K_k を含む $\vee$ G_2 が K_ℓ を含む

ラムゼー数の存在性：証明

証明 は以下の再帰式に基づいた帰納法

ラムゼー数に対する再帰式

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k,1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1,\ell) = 1$
- 任意の $k,\ell > 1$ に対して，$R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$

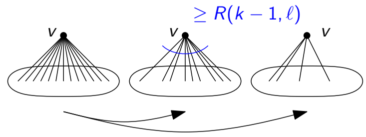
これが証明できれば，グラフに対するラムゼーの定理の証明になる

- $R(k,1) = 1$ と $R(1,\ell) = 1$ は簡単．主題は最後の不等式

ラムゼー数に対する再帰式：証明 (1)

$N = R(k,\ell-1) + R(k-1,\ell)$ とする

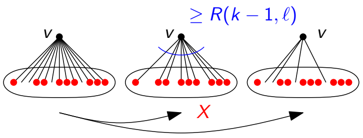
- K_N の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は $N-1$ 個存在
- その中の $R(k-1,\ell)$ 個が G_1 に存在するか，または，
  その中の $R(k,\ell-1)$ 個が G_2 に存在　　　(補足：集合の 2 分割)



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (2)

v に接続する辺の中の $R(k-1,\ell)$ 個が G_1 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k-1,\ell)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



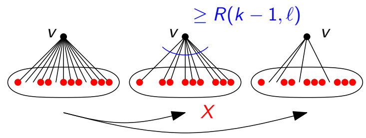
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (3)

場合 1：X の中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら $k-1$ 個の頂点と v が K_k を作る

場合 2：X の中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

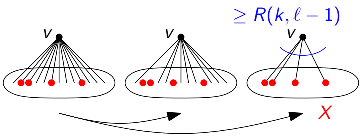
- G_2 において，それら ℓ 個の頂点が K_ℓ を作る



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (4)

v に接続する辺の中の $R(k,\ell-1)$ 個が G_2 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k,\ell-1)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の $\ell-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



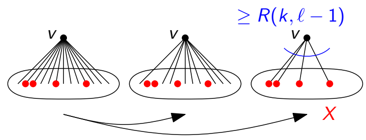
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (5)

場合 1：X の中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら k 個の頂点が K_k を作る

場合 2：X の中の $\ell-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

- G_2 において，それら $\ell-1$ 個の頂点と v が K_ℓ を作る　$\square$



ラムゼー数の上界

ラムゼー数に対する再帰式 (再掲)

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k,1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1,\ell) = 1$
- 任意の $k,\ell > 1$ に対して，$R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$

この式から次の上界が得られる (演習問題)

$$R(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$$

ただし，$\binom{a}{b}$ とは二項係数 (組合せの総数，${}_a\mathrm{C}_b$ とも書く)

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \qquad (\text{ただし，} a \geq b)$$

ラムゼー数の上界：$k = \ell$ の場合

特に，$k = \ell$ の場合

$$R(k,k) \leq \binom{k+k-2}{k-1} = \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!}$$

ここで，スターリングの公式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ を用いると次が得られる

$$R(k,k) = O\left(\frac{4^k}{\sqrt{k}}\right)$$

ラムゼー数に対する上界の表

$\binom{k+\ell-2}{k-1}$ の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462
7	1	7	28	84	210	462	924

小さなラムゼー数の表

小さなラムゼー数の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18	25	35–41	49–61
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165	113–298
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540

(Radziszowski '14 によるまとめ)

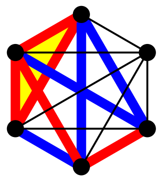
未解決問題

この表にあるギャップを埋めよ
($R(5,5) = 43$ であると予想されている)

目次

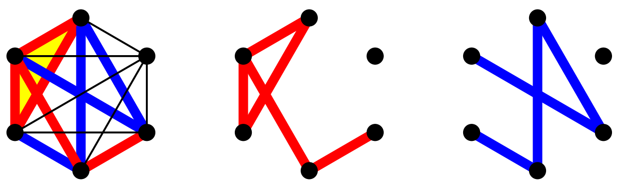
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



クリーク・ゲームとラムゼー理論

辺に色を塗ることは辺集合の分割を作っていくことに対応



ラムゼー理論の帰結

K_6 の中で K_3 を作るゲームに引き分けはない

疑問：先手に必勝法はあるか？ 後手に必勝法はあるか？

後手が勝つことはできない…

残念なお知らせ

後手が勝つことはできない

なぜか？ …… 戦略拝借 という考え方

- 後手に必勝法があると仮定する
- このとき，先手には次のような必勝法がある
- これは後手に必勝法があることに矛盾

先手の必勝法

1. はじめは，任意の辺 (好きな辺) を選び，塗る
2. 次からは，相手を先手，自分を後手だと見なして，後手の必勝法に従って辺を選び，塗る
   - 既に自分が塗った辺を塗ろうとするときは，任意の辺を塗る
3. これを繰り返す

余計に辺を塗っても自分の不利にならず，相手の有利にもならないので，これは先手の必勝法 □

ここまでのまとめ

K_6 の中で K_3 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは 簡単 なので演習問題

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (1)

K_{18} の中で K_4 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(4,4) = 18$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは未解決問題！ (Beck '08)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (2)

K_{49} の中で K_5 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(5,5) \leq 49$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは未解決問題！ (Beck '08)

Seem to be hopeless

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (3)

K_{165} の中で K_6 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(6,6) \leq 165$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

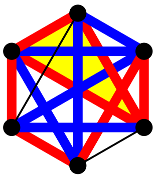
これは未解決問題！ (Beck '08)

Seem to be hopeless

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 2：Sim

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
(つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim — 何が知られている？

K_6 の中で K_3 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手必勝である！ (Mead, Rosa, Huang '74)

証明はコンピュータによる探索 (手でもできるけど…)

未解決問題

Sim において後手必勝である「簡単」な証明と必勝法はあるか？

Sim の変種

K_{18} の中で K_4 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼーの理論から)

未解決問題 (Beck '08)

このゲーム，後手必勝か先手必勝か？

目次

概要

今日のまとめ

ラムゼー理論の基礎を理解する

- グラフのラムゼー数
- ラムゼー理論に関わるゲーム