

提出締切： —

復習問題 14.1

1. $R(6, 6) \leq 3$ を証明せよ.
2. $R(6, 6) \geq 3$ を証明せよ.

復習問題 14.2 任意の自然数 $k, \ell > 1$ に対して

$$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$$

が成り立つことを証明せよ.

復習問題 14.3 2人のプレイヤーが完全グラフ K_6 の辺を交互に選び、先に K_3 を作成した方が勝ちとなるゲームを考える.

1. このゲームが引き分けで終わることがないことを証明せよ.
2. このゲームが先手必勝のゲームであることを証明せよ.

補足問題 14.4 自然数 n と有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$ を考える. このとき, 自然数 a, b が $n = a + b - 1$ を満たすとき, X の任意の 2 分割 $X = X_1 \cup X_2$ に対して, $|X_1| \geq a$ または $|X_2| \geq b$ が成り立つことを証明せよ.

補足問題 14.5 任意の自然数 $k, \ell \geq 1$ に対して

$$R(k, \ell) \leq \binom{k + \ell - 2}{k - 1}$$

が成り立つことを証明せよ.

補足問題 14.6 演習問題 14.3 にあるゲームを考える. 先手の必勝法を記述せよ. (ヒント: 先手は辺を 4 つ選んだ時点で勝利できる.)

追加問題 14.7

1. $R(3, 4) \leq 9$ を証明せよ. (ヒント: まず $R(3, 4) \leq 10$ を証明せよ. そして, $R(3, 4) \geq 10$ であるとしたとき矛盾が生じることを示せ. 握手補題を思い出してみよ.)
2. $R(3, 4) \geq 9$ を証明せよ.