

提出締切：2015年7月27日

復習問題 12.1 任意の木が平面的グラフであることを証明せよ。

復習問題 12.2 平面グラフ  $G$  の頂点数, 辺数, 面数, 連結成分数がそれぞれ  $n, m, f, k$  であるとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 12.3

1. 頂点数が3以上である任意の連結平面的グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$  が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 頂点数5の完全グラフ  $K_5$  が平面的ではないことを証明せよ。

復習問題 12.4 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体以外に, 3次元正多面体が存在しないことを証明せよ。(ヒント: 3次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい。)

補足問題 12.5

1. 頂点数が2以上である任意の連結外平面的グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $|E| \leq 2 \cdot |V| - 3$  が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 頂点数4の完全グラフ  $K_4$  が外平面的ではないことを証明せよ。

追加問題 12.6 ある3以上の整数  $n$  に対して, 頂点数が  $n$  であり, 辺数が  $3n - 6$  以下であるが, 平面的ではないグラフを構成せよ。そのグラフがなぜ平面的でないのかも説明せよ。

追加問題 12.7

1. 頂点数が3以上である任意の連結平面的グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $G$  が長さ3の閉路を含まないならば,  $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$  が成り立つことを証明せよ。

2. それを用いて, 完全二部グラフ  $K_{3,3}$  が平面的ではないことを証明せよ。

追加問題 12.8 各面が正五角形か正六角形であるような3次元凸多面体において, 正五角形である面の数が必ず12になることを証明せよ。(ヒント: 3次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい。まず, 各頂点の次数が3であることを証明せよ。)

追加問題 12.9

1. 頂点数が2以上である任意の連結外平面的グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $G$  が長さ3の閉路を含まないとき,  $|E| \leq \frac{3}{2} \cdot |V| - 2$  が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  が外平面的ではないことを証明せよ。