

離散数学 第 16 回
補講：グラフ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 7 月 31 日

最終更新：2015 年 7 月 31 日 14:43

スケジュール 前半

- | | | |
|---|--|---------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (4月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (4月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (4月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (5月1日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (5月8日) |
| 6 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (5月15日) |
| 7 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (5月22日) |
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (5月29日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (6月5日) |
| | ● 中間試験 | (6月12日) |

- | | | |
|----|----------------------|---------|
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (6月19日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (6月26日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (7月3日) |
| 13 | 関係 (4) : 関係の閉包 | (7月10日) |
| 14 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (7月17日) |
| 15 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (7月24日) |
| | ● 補講 : グラフ (西 8-131) | (7月31日) |
| | ● 期末試験 (西 8-131) | (8月7日) |

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

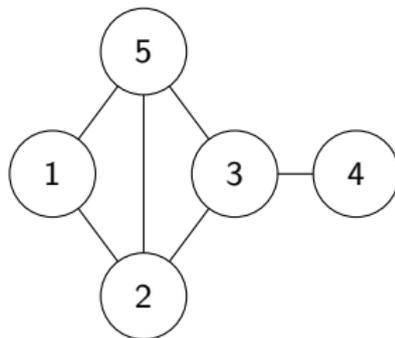
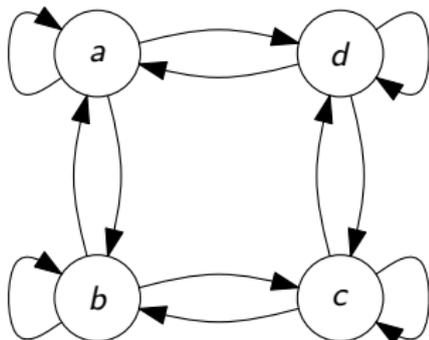
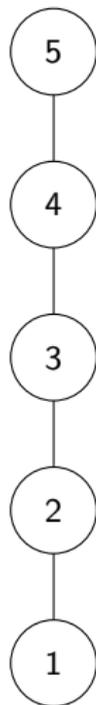
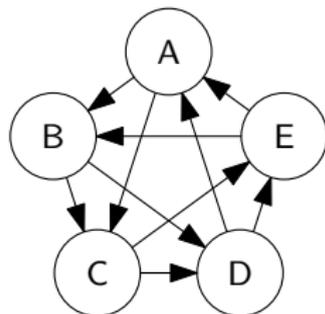
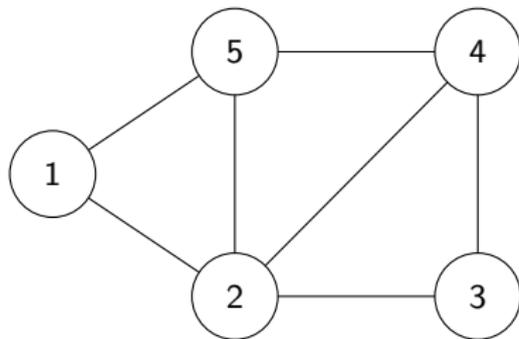
今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解し, グラフに関する用語を正しく用いることができるようになる
- ▶ グラフの同型性を理解し, 同型であるか判定できるようになる

目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

有向グラフとは、順序対 (V, A) で、

- ▶ V は集合
- ▶ $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：

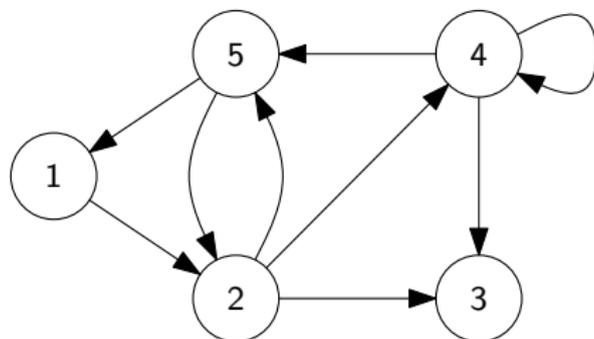
- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

注意

$(1, 2) \neq (2, 1)$

有向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



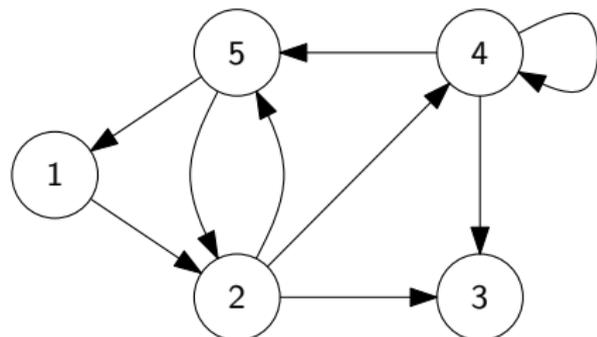
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の頂点と呼ぶ
- ▶ V を G の頂点集合と呼ぶ
- ▶ 弧 $(u, v) \in A$ に対して, u はその始点であり, v はその終点である
- ▶ A の要素を G の弧と呼ぶ
- ▶ A を G の弧集合と呼ぶ

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- ▶ 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点, 頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは、順序対 (V, E) で、

- ▶ V は集合
- ▶ $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合であるもののこと

例：

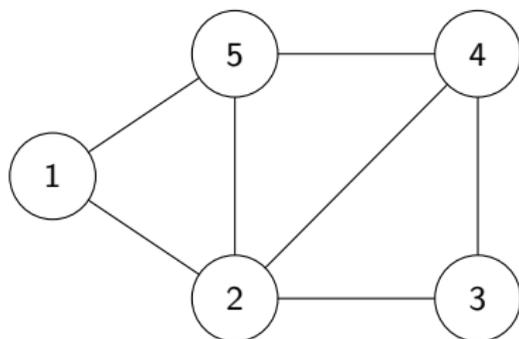
- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

注意

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

無向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



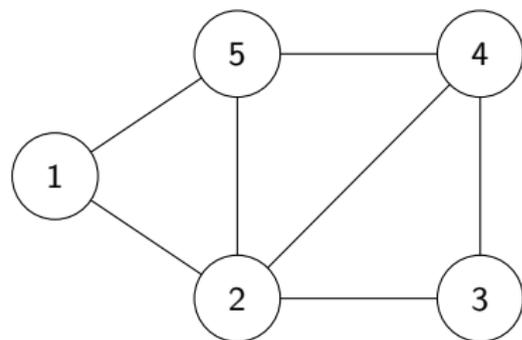
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

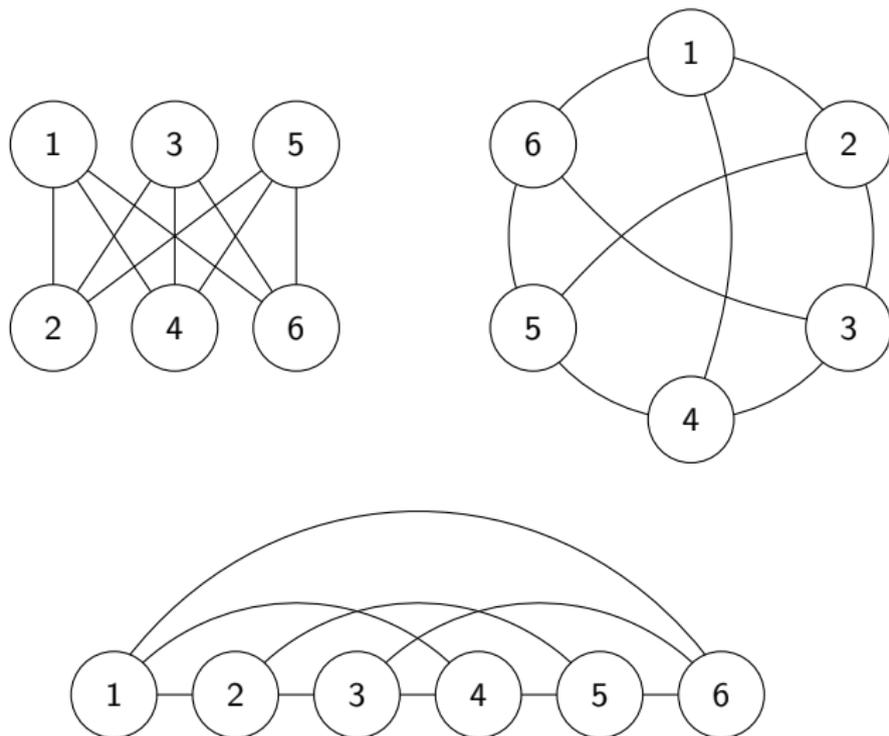
無向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の頂点と呼ぶ
- ▶ V を G の頂点集合と呼ぶ
- ▶ 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して, u, v をその端点と呼ぶ
- ▶ E の要素を G の辺と呼ぶ
- ▶ E を G の辺集合と呼ぶ

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▶ 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点



1つのグラフに対するいろいろな図示

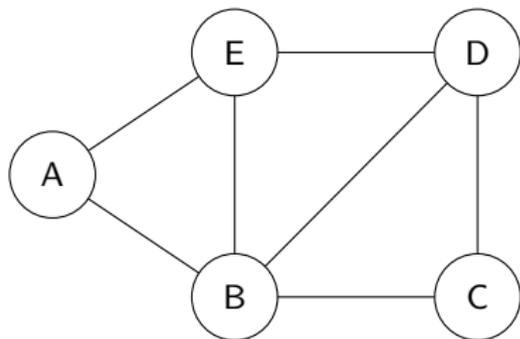
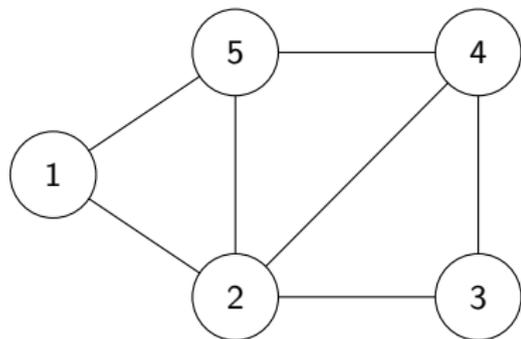


目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ

「同じ」グラフとは？ (1)

次の2つのグラフをしてみる



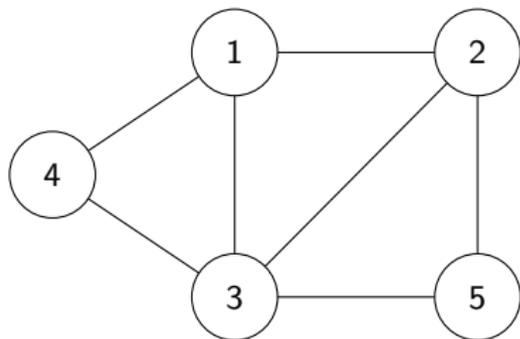
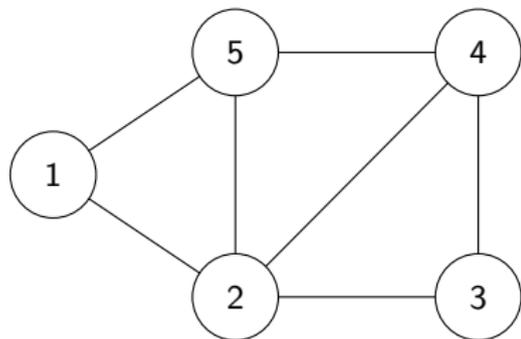
- ▶ 頂点同士の「つながり方」は同じである
- ▶ しかし、頂点集合、辺集合は異なる
- ▶ したがって、この2つは「同じグラフではない」

でも「同じであると思いたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

「同じ」グラフとは？ (2)

次の2つのグラフをしてみる



- ▶ 頂点同士の「つながり方」は同じである
- ▶ しかし、辺集合は異なる
- ▶ したがって、この2つは「同じグラフではない」

でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

同型写像 (有向グラフの場合)

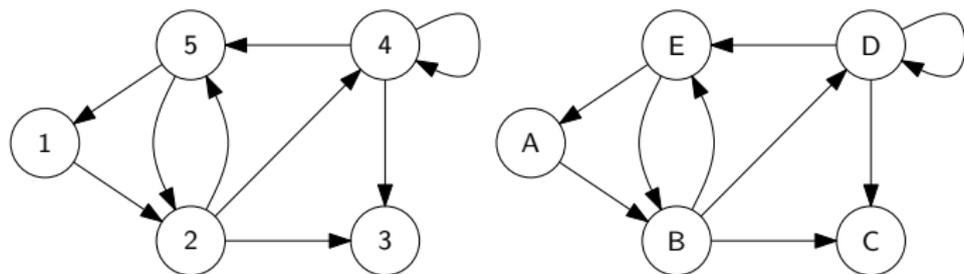
2つの有向グラフ $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への同型写像とは、全単射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ で次を満たすもの

- ▶ 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して,

$$(u, v) \in A_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$$



$$\varphi(1) = A, \varphi(2) = B, \varphi(3) = C, \varphi(4) = D, \varphi(5) = E$$

同型写像 (無向グラフの場合)

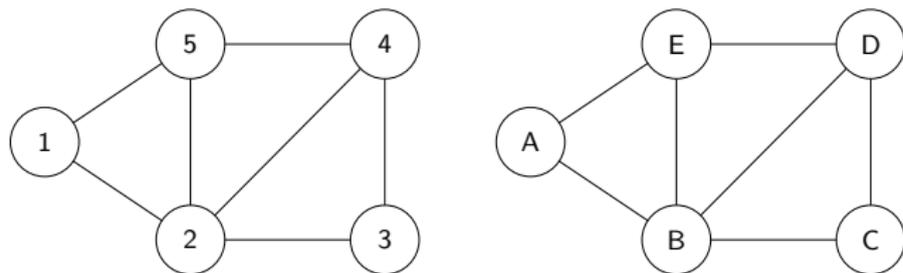
2つの無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への同型写像とは、全単射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ で次を満たすもの

- ▶ 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して、

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$



$$\varphi(1) = A, \varphi(2) = B, \varphi(3) = C, \varphi(4) = D, \varphi(5) = E$$

同型なグラフ

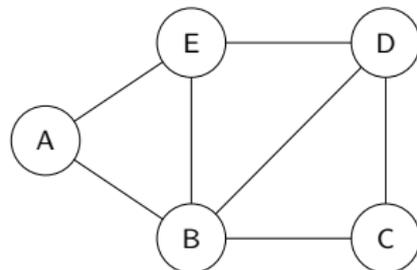
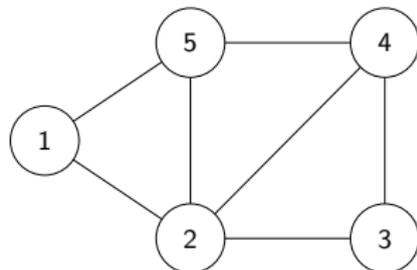
同型なグラフとは？

G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき、
 G_1 と G_2 は同型であるといい、

$$G_1 \simeq G_2$$

と書き表す

次の2つのグラフは同型



同型である，という関係は同値関係

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

- ▶ 「 \simeq 」は Γ 上の関係

\simeq の重要な性質

\simeq は Γ 上の同値関係

つまり， \simeq は次の3つの性質を満たす

- ▶ 任意の $G \in \Gamma$ に対して， $G \simeq G$ (反射性)
- ▶ 任意の $G_1, G_2 \in \Gamma$ に対して， $G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ (対称性)
- ▶ 任意の $G_1, G_2, G_3 \in \Gamma$ に対して， $G_1 \simeq G_2$ かつ $G_2 \simeq G_3$ ならば $G_1 \simeq G_3$ (推移性)

\simeq の反射性 : 証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して, $G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して, 同型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ が存在する

さらに, 定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して,
全単射 $\varphi: V \rightarrow V$ で次を満たすものが存在する

▶ 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して,

$$\{u, v\} \in E \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$$

証明の方針 : そのような全単射 φ を実際に構成する

\simeq の反射性 : 証明 (2)

- ▶ 任意の無向グラフ G に対して, G から G への同型写像が存在することを証明すればよい.
- ▶ すなわち, 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して, 全単射 $\varphi: V \rightarrow V$ で次を満たすものが存在することを証明すればよい.
 - ▶ 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して,

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

- ▶ そのような全単射として, 恒等写像 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ を考える.
- ▶ このとき, 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\text{id}_V(u), \text{id}_V(v)\} \in E$$

である.

- ▶ したがって, id_V は G から G への同型写像である. □

\simeq の対称性と推移性の証明は演習問題

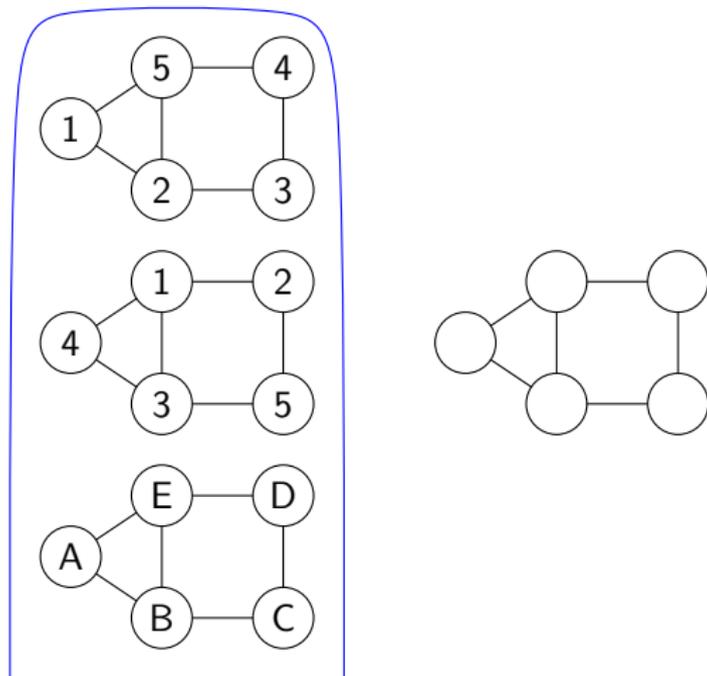
対称性に関するヒント

- ▶ 無向グラフ G_1, G_2 に対して, G_1 から G_2 への同型写像 φ が存在すると仮定する
- ▶ φ は全単射なので, 逆写像 φ^{-1} が存在し, それも全単射
(補足問題 9.5, 9.7 参照)
- ▶ φ^{-1} が G_2 から G_1 への同型写像になることを証明すればよい

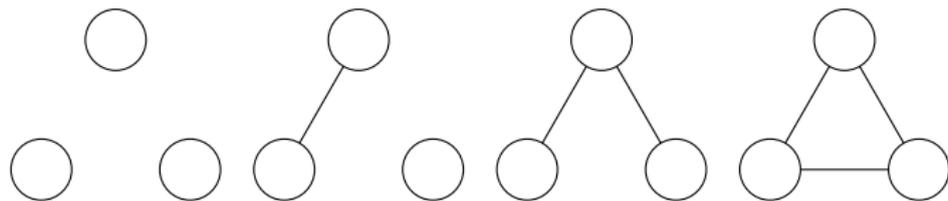
推移性に関するヒント

- ▶ 無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して, G_1 から G_2 への同型写像 φ_1 と G_2 から G_3 への同型写像 φ_2 が存在すると仮定する
- ▶ 合成関数 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ を考えると, φ_1, φ_2 が全単射なので, これも全単射
(演習問題参照)
- ▶ $\varphi_2 \circ \varphi_1$ が G_1 から G_3 への同型写像になることを証明すればよい

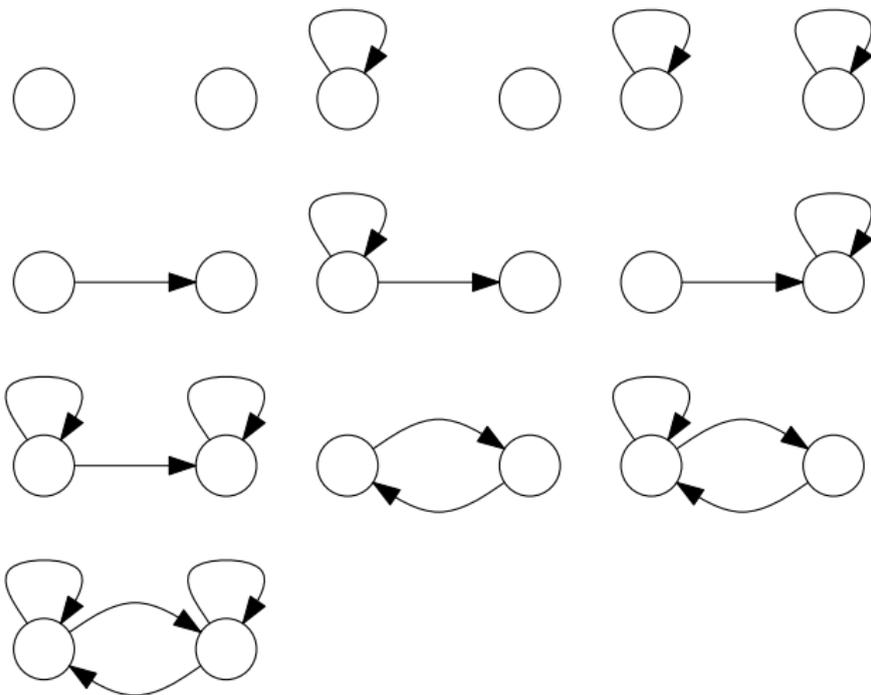
グラフの同型類の図示



頂点数 3 の無向グラフの同型類すべて

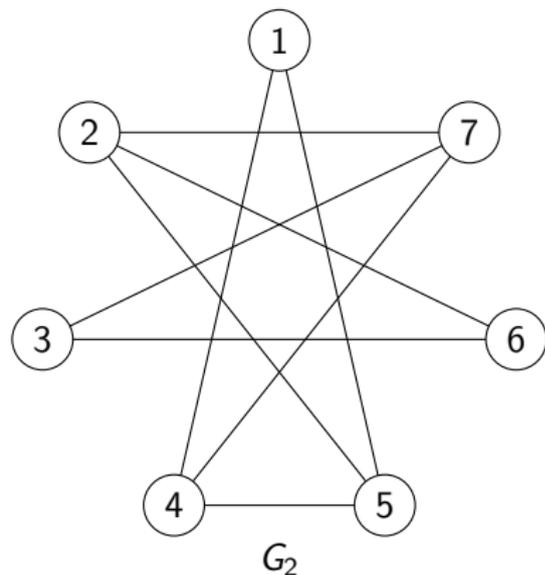
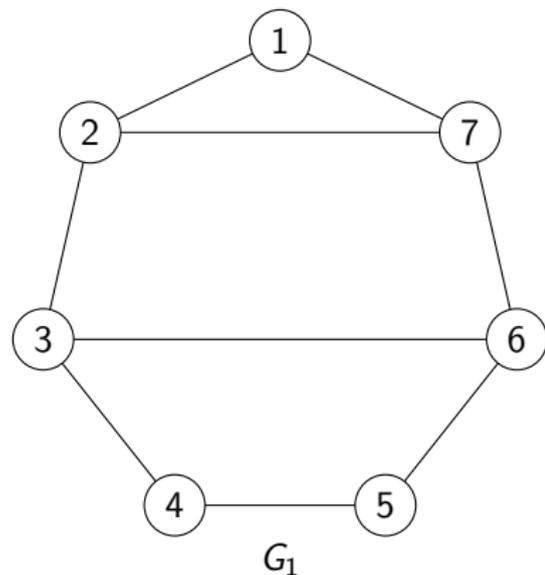


頂点数 2 の有向グラフの同型類すべて



例題：グラフの同型性 (1)

次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して,
 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ

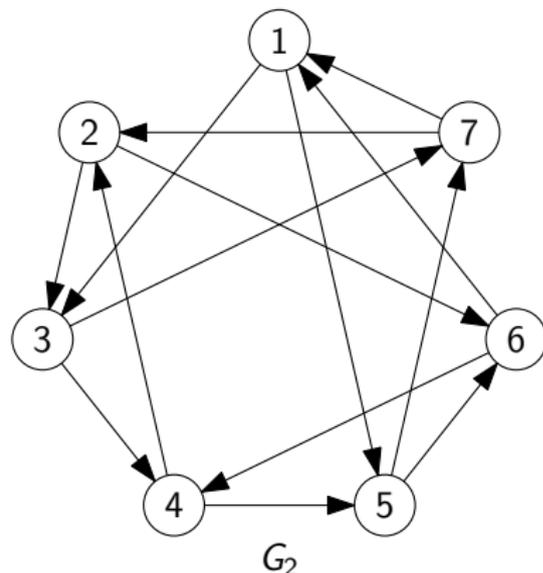
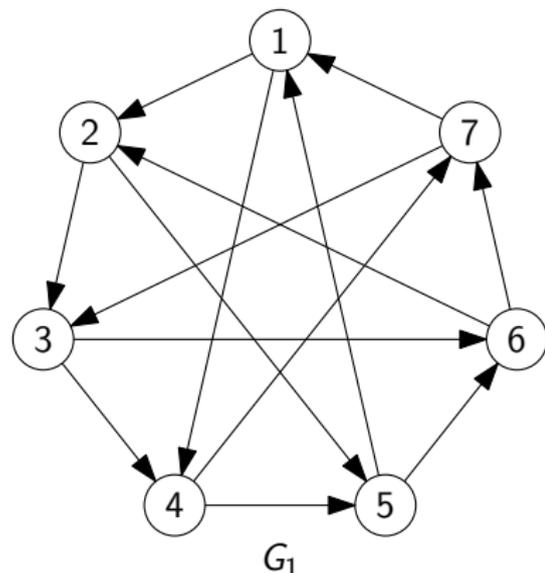


次で定められる φ は同型写像である

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 5$$

例題：グラフの同型性 (2)

次の2つの有向グラフ G_1, G_2 に対して,
 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ



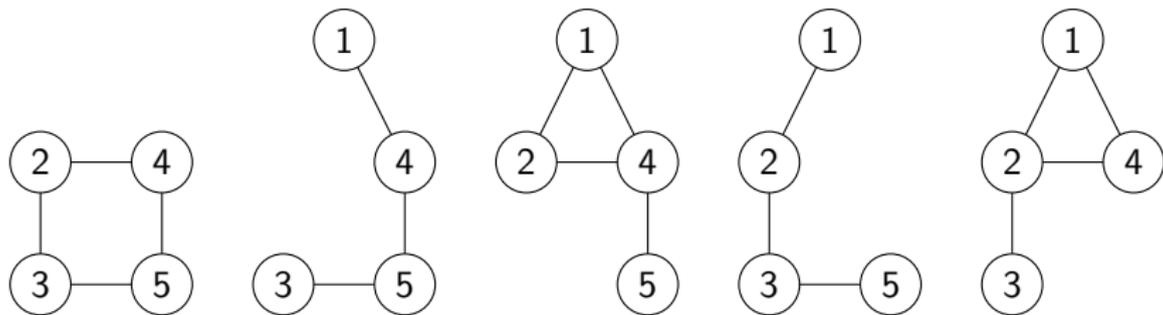
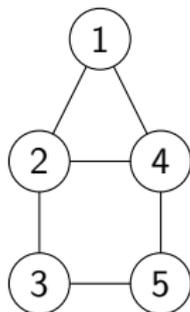
次で定められる φ は同型写像である

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 5, \varphi(5) = 7, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

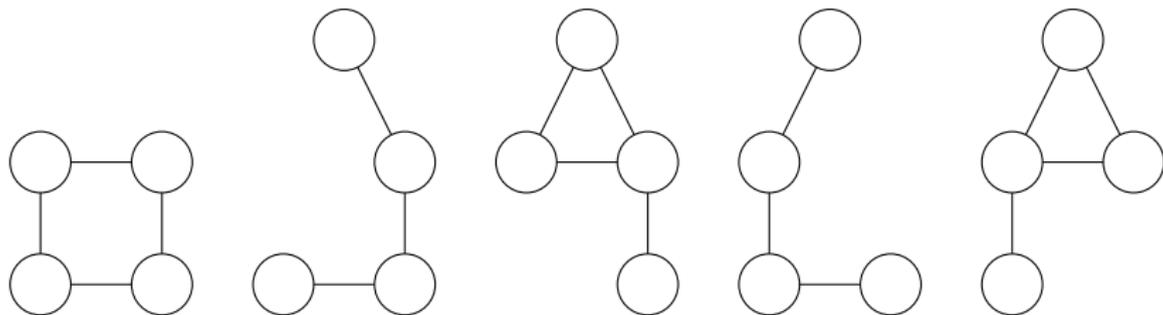
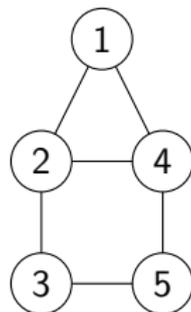
目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想**
- ④ 今日のまとめ

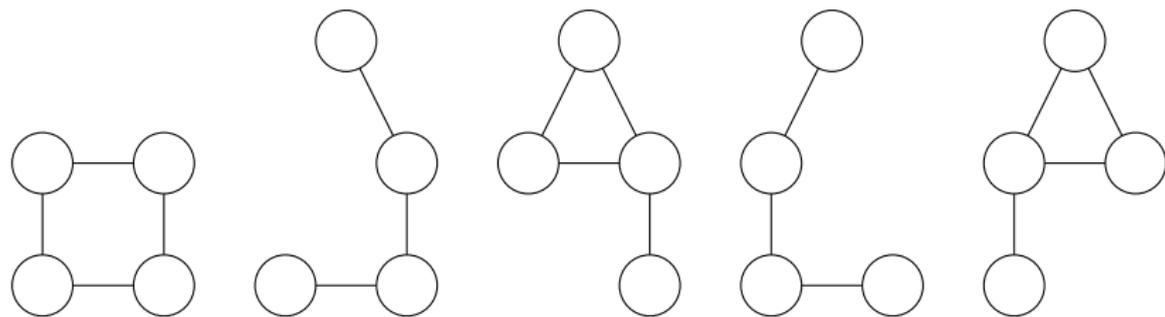
1つの頂点を取り除いたグラフを作成...



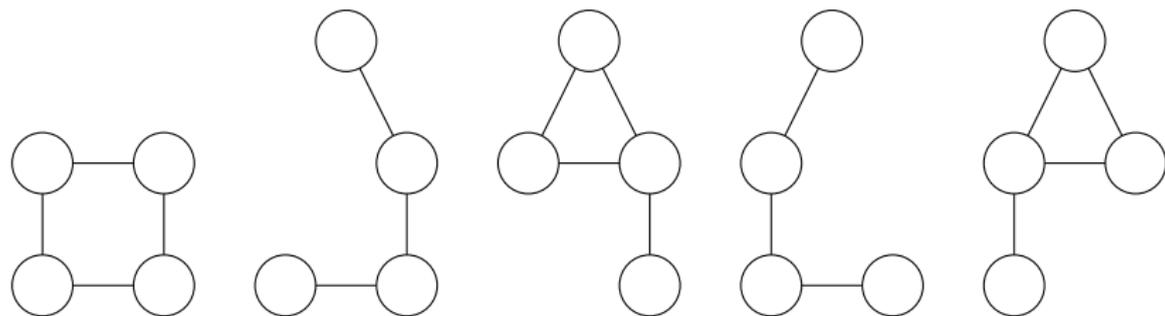
ラベルを忘れる



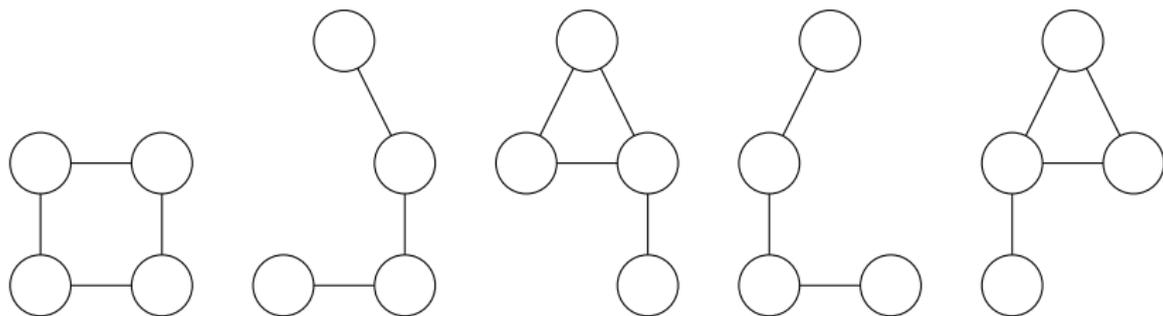
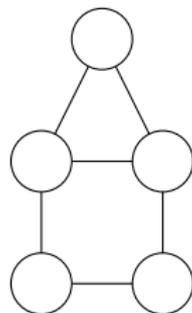
元のグラフを忘れる



再構成問題：元のグラフ (の同型類) を復元すること

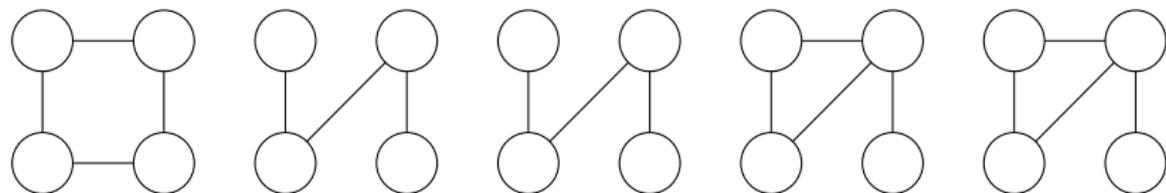


再構成問題：元のグラフ (の同型類) を復元すること



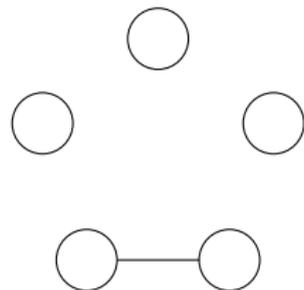
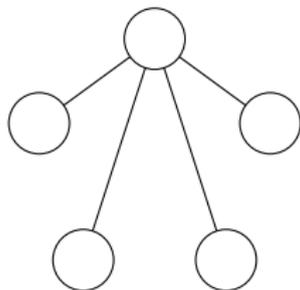
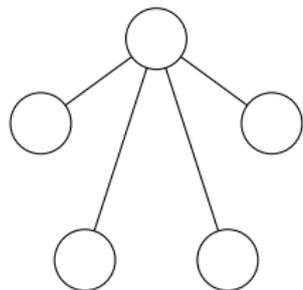
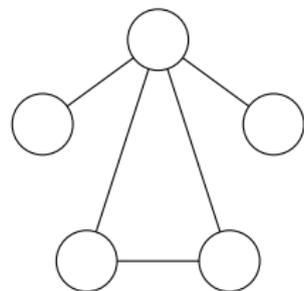
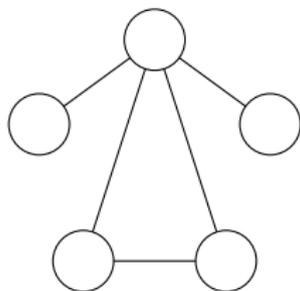
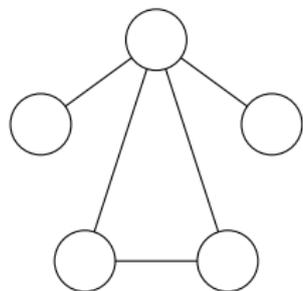
再構成問題：例 0

元のグラフは何でしょう？



再構成問題：例 1

元のグラフは何でしょう？



再構成予想

再構成予想

(ケリーとウラム '42)

頂点数が 3 以上の無向グラフは一意に再構成可能である

つまり,

G と H が頂点数 3 以上の 非同型 な無向グラフであるとき,
 G から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストと
 H から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストは
異なる

という予想

用語：デッキ

G から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストを
 G の **デッキ** と呼ぶ

再構成問題は、デッキから G (の同型類) を復元する問題

目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解し, グラフに関する用語を正しく用いることができるようになる
- ▶ グラフの同型性を理解し, 同型であるか判定できるようになる

期末試験

- ▶ 日時：8月7日(金) 第3時限
- ▶ 教室：西8号館 131教室 (いつもの場所)
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第8回講義の最初から第15回講義の最後まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を6題出題する
 - ▶ その中の3題は講義の演習問題として提示されたものと同じ
 - ただし、発展問題は出題しない
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1題10点満点，計60点満点
- ▶ 時間：90分
- ▶ 持ち込み：A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

成績

- ▶ $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ