離散数学 第 15 回
集合と論理 (5)：集合の再帰的定義

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 7 月 24 日

最終更新：2015 年 7 月 31 日　14:46

スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 10 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 17 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 24 日)
4. 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 1 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 8 日)
6. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (5 月 15 日)
7. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 22 日)
8. 写像 (1)：像と逆像 (5 月 29 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 5 日)

- 中間試験 (6 月 12 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半

10. 関係 (1)：関係 (6 月 19 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (6 月 26 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (7 月 3 日)
13. 関係 (4)：関係の閉包 (7 月 10 日)
14. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 17 日)
15. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 24 日)

- 補講 (西 8-131) (7 月 31 日)
- 期末試験 (西 8-131) (8 月 7 日)

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 再帰的定義を通して，写像の冪乗と関係の冪乗を理解する
- 集合を再帰的に定義する方法を理解する

目次

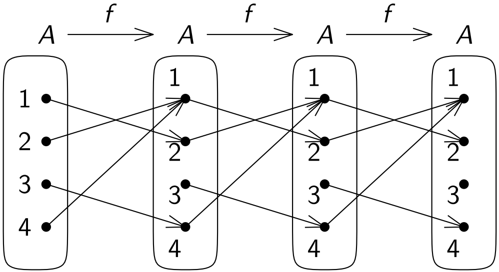
写像の冪乗

集合 A と写像 $f\colon A \to A$

写像の冪乗とは？

0 以上の整数 n に対して f の**冪乗** $f^n\colon A \to A$ を次で定義する

$$f^n = \begin{cases} \mathrm{id}_A & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f \circ f^{n-1} & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,$
  $f(3) = 4,\ f(4) = 1$
- $f^2(1) = 1,\ f^2(2) = 2,$
  $f^2(3) = 1,\ f^2(4) = 2$
- $f^3(1) = 2,\ f^3(2) = 1,$
  $f^3(3) = 2,\ f^3(4) = 1$

関係の冪乗

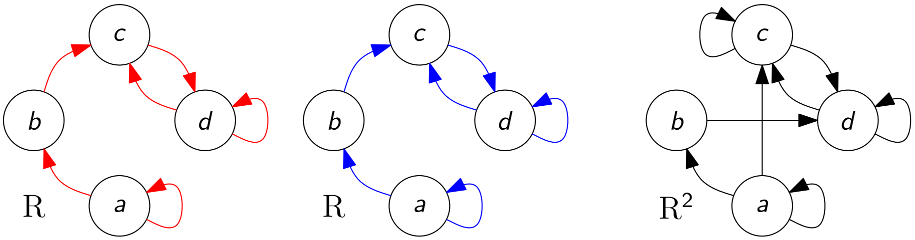
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の**冪乗** $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



関係の冪乗

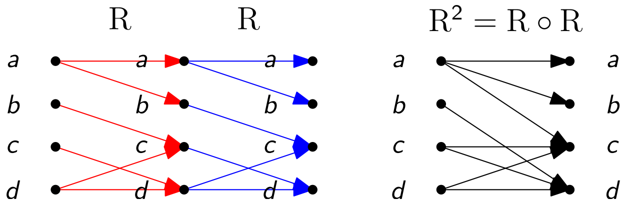
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の**冪乗** $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



関係の冪乗

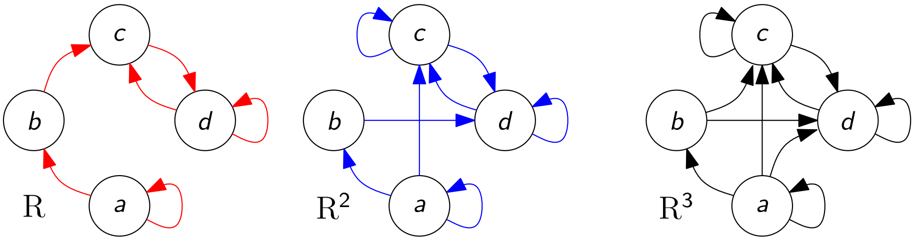
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の冪乗 $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



関係の冪乗

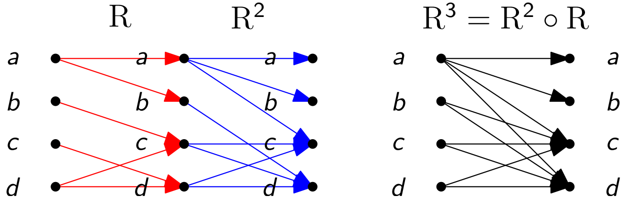
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の**冪乗** $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



関係の冪乗

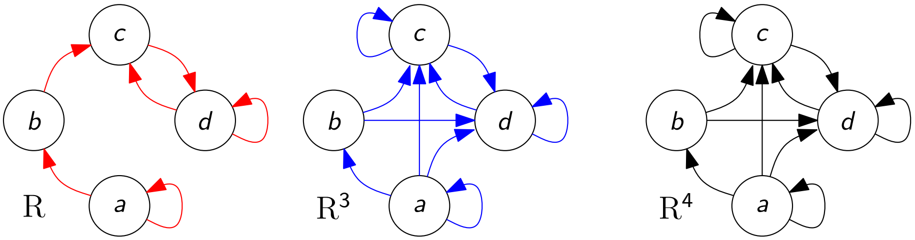
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の冪乗 $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



関係の冪乗

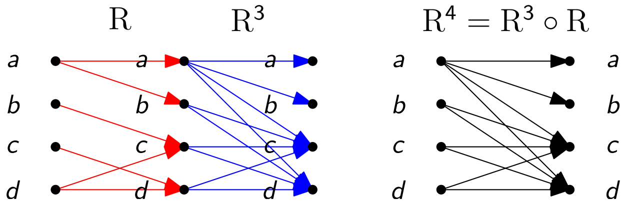
集合 A と関係 $\mathrm{R} \subseteq A^2$

関係の冪乗とは？

1 以上の整数 n に対して R の**冪乗** $\mathrm{R}^n \subseteq A^2$ を次で定義する

$$\mathrm{R}^n = \begin{cases} \mathrm{R} & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}^{n-1} \circ \mathrm{R} & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathrm{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$



写像の冪乗：例題

例題 1

写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

確認

- $n = 2$ のとき：$f^2(x) = f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 2^3x^4$
- $n = 3$ のとき：$f^3(x) = f(2^3x^4) = 2(2^3x^4)^2 = 2^7x^8$
- $n = 4$ のとき：$f^4(x) = f(2^7x^8) = 2(2^7x^8)^2 = 2^{15}x^{16}$
- $\ldots$

写像の冪乗：例題 — 証明 (1)

例題 1

写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を
$$f(x) = 2x^2$$
と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して
$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$
が成り立つことを証明せよ

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= f^1(x) = f(x) = 2x^2$
- 右辺 $= 2^{2^1-1}x^{2^1} = 2x^2$
- したがって，$n = 1$ のとき，$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$ は正しい．

写像の冪乗：例題 — 証明 (2)

例題 1

写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $f^k(x) = 2^{2^k-1}x^{2^k}$ が正しいと仮定する．
- 証明すべきことは，$f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ である．

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$f^{k+1}(x)$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
& = (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)}
\end{aligned}
$$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$f^{k+1}(x)$

$= (f \circ f^k)(x)$ (写像の冪乗の定義)

$= f(f^k(x))$ (写像の合成の定義)

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
&f^{k+1}(x) \\
&\quad = (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\
&\quad = f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\
&\quad = f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}
$$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(x) & \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)}
\end{aligned}
$$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
&f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)}
\end{aligned}
$$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)} \\
&= 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}} && \text{(更に整理)}
\end{aligned}
$$

写像の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)} \\
&= 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}} && \text{(更に整理)}
\end{aligned}
$$

したがって，$f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ は正しい．□

目次

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「文字」をどのように定義するか？

- 文字は集合

英語ならば，$\{$a, b, c, d, ..., x, y, z$\}$

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「文字」をどのように定義するか？

- 文字は集合

英語ならば，{a, b, c, d, ..., x, y, z}

「列」をどのように定義するか？

これがここからの話

- 再帰的に定義する

文字列の定義

文字の集合 Σ (アルファベットと呼ぶことが多い)

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である (ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

例：$\Sigma = \{a, b\}$ のとき

$$\begin{aligned}\Sigma^* &= \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa,\\ &\quad baa, aab, bab, aba, bba, abb, bbb, \ldots\}\end{aligned}$$

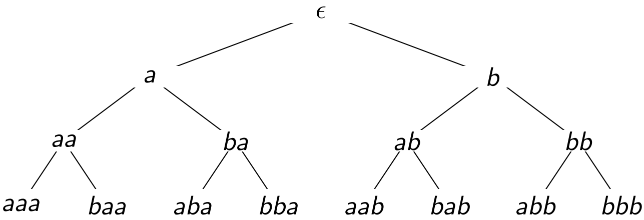
再帰的定義を理解する (1)：生成する

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す



再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

$$\begin{array}{c} bab \\ | \\ ab \\ | \\ b \\ | \\ \epsilon \end{array}$$

再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

$$\begin{array}{c} bca \\ | \\ ca \quad \times \end{array}$$

bca は $\{a, b\}$ 上の文字列ではない

格言

「生成」と「認識」は集合の再帰的定義の 2 つの側面

文字列の長さ

文字列の長さ (直感に基づく定義)

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さは，s に含まれる Σ の要素の数

文字列	長さ
ϵ	0
a	1
b	1
aa	2
abb	3
$baabaabb$	8

ちゃんと定義するには？

文字列の再帰的定義に沿って，その長さも再帰的に定義する

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\ell(babb)$$

注意

より正確には，$\ell\colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\ell(babb) \quad = \quad 1 + \ell(abb)$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\begin{aligned} \ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\ &= 1 + (1 + \ell(bb)) \\ &= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \end{aligned}$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon))))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon)))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + 0)))
\end{aligned}$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon)))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + 0))) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

文字列の性質

文字の集合 Σ

例題

Σ 上の任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と任意の文字 $x \in \Sigma$ に対して

$$sx \in \Sigma^*$$

となることを証明せよ

証明の方針

s の長さに関する帰納法

(s の長さは 0 以上なので,「長さが 0」のときが基底段階)

文字列の性質：証明 (1)

<u>証明 (基底段階)</u>：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$

文字列の性質：証明 (1)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$
- $\epsilon \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ なので，文字列の定義より $x \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (1)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$
- $\epsilon \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ なので，文字列の定義より $x \in \Sigma^*$
- したがって，$sx \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (2)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (2)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える

- $sx \in \Sigma^*$ $\square$

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k+1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k+1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k+1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$ytx \in \Sigma^*$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$ytx \in \Sigma^*$
- $yt = s$ なので，$sx \in \Sigma^*$ □

「回文」を定義する

回文 (かいぶん) (デジタル大辞泉)

1. 複数の人に順に回して知らせるようにした手紙や通知。回状。まわしぶみ。かいもん。
2. 和歌・俳諧などで、上から読んでも下から逆に読んでも同じ音になるように作ってある文句。「たけやぶやけた」の類。かいもん。

2 の意味での回文の例 (http://kaibunfan.com/より)

- できたら、しらたきで。
- ごつい、ドイツ語。
- 静岡を図示。
- 寒い！タンメンタイムさ。
- 良い知らせらしいよ。
- 風邪、なぜか、なかなか長いが、なかなかな風邪。なぜか。

回文を再帰的に定義する

文字の集合 Σ

回文とは？

Σ 上の回文とは，Σ 上の文字列で次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の回文である
2. 任意の $x \in \Sigma$ に対して x は Σ 上の回文である
3. s が Σ 上の回文であり，$x \in \Sigma$ ならば，xsx も Σ 上の回文である
4. このようにして生成されるものだけが Σ 上の回文である

例：$\Sigma = \{a, b\}$ のとき

$$\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bab, aba, bbb, \ldots$$

例題：次の写像はどんな操作を行う写像だろうか？

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\, f(s)$

考えたいこと

- この写像 f が行う操作は何なのか？
- この写像 f がうまく定義されているか？ ($f(s) \in \Sigma^*$ なのか？)

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$f(abbaa)$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$f(abbaa) \quad = \quad aa\,f(bbaa)$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\, f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\, f(bbaa) \\
&= aabb\, f(baa)
\end{aligned}
$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\
&= aabb\,f(baa) \\
&= aabbbb\,f(aa)
\end{aligned}
$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\
&= aabb\,f(baa) \\
&= aabbbb\,f(aa) \\
&= aabbbbaa\,f(a)
\end{aligned}
$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\
&= aabb\,f(baa) \\
&= aabbbb\,f(aa) \\
&= aabbbbaa\,f(a) \\
&= aabbbbaaaa\,f(\epsilon)
\end{aligned}
$$

例題：例を見てみる

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa)\\
&= aabb\,f(baa)\\
&= aabbbb\,f(aa)\\
&= aabbbbaa\,f(a)\\
&= aabbbbaaaa\,f(\epsilon)\\
&= aabbbbaaaa
\end{aligned}
$$

例題：うまく定義されていること

次の写像 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

証明すること

任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ であること

s の長さに関する帰納法で証明する

例題：うまく定義されていること (証明)

<u>証明 (基底段階)</u>：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，
  ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$y\,f(t) \in \Sigma^*$ となり，さらに $yy\,f(t) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$y\,f(t) \in \Sigma^*$ となり，さらに $yy\,f(t) \in \Sigma^*$
- f の定義より，$f(s) = f(yt) = yy\,f(t)$ なので，$f(s) = y\,f(t) \in \Sigma^*$

□

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 数学的帰納法で証明ができるようになる
- 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

期末試験

- 日時：8 月 7 日 (金) 第 3 時限
- 教室：西 8 号館 131 教室 (いつもの場所)
- 出題範囲
  - 第 8 回講義の最初から第 15 回講義の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は講義の演習問題として提示されたものと同一
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績

- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次