

離散数学 第 7 回
証明法 (3) : 集合に関する証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 5 月 22 日

最終更新 : 2015 年 5 月 28 日 08:09

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--|---------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (4月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (4月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (4月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (5月1日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (5月8日) |
| 6 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (5月15日) |
| 7 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (5月22日) |
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (5月29日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (6月5日) |
| | ● 中間試験 | (6月12日) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|---------|
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (6月19日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (6月26日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (7月3日) |
| 13 | 関係 (4) : 関係の閉包 | (7月10日) |
| 14 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (7月17日) |
| 15 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (7月24日) |
| | ● 授業等調整日 (予備日) | (7月31日) |
| | ● 期末試験 | (8月7日?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- ▶ 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- ▶ 推論の類型として、4つの推論規則が使えるようになる
 - ▶ モーダス・ポネンス
 - ▶ モーダス・トレンス
 - ▶ 仮言三段論法
 - ▶ 選言三段論法

(注：この4つの推論規則の名称は重要ではない)

目次

- ① 推論とその類型
- ② 部分集合に関する重要な性質
- ③ 部分集合に関する性質の証明
- ④ 今日のまとめ

推論と証明法

「～ならば…である」という命題の証明法 (再掲)

- 1 「～であると仮定する」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて、「…である」を証明する

今後出てくる証明にあること

- ▶ 証明で 用いる性質 が複雑になってくる
 - ▶ 用いる性質どうしを組み合わせて、使える性質を導く (推論)
 - ▶ 用いる性質：仮定、または、仮定の下で正しいと分かっていること
- ▶ 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
 - ▶ 示したいことを変更して、証明をしやすくする

推論とは？

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「 $P \Rightarrow Q$ 」であるとき、
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

- ▶ 解釈： P が正しいとき、 Q も正しいので、そのような置換が可能
- ▶ 実は今までも無意識に用いている

第4回講義資料より：例題

例題：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$.
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

第4回講義資料より：例題

例題：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$. ←ここ
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である. □

用いている推論

a が実数である $\Rightarrow a^2 \geq 0$

推論の類型

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「 $P \Rightarrow Q$ 」であるとき、
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある \rightsquigarrow それをまず紹介

- ▶ モーダウス・ポネンス
- ▶ モーダウス・トレンス
- ▶ 仮言三段論法
- ▶ 選言三段論法

モードゥス・ポネンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

つまり，

- ▶ P が使える性質
- ▶ $P \rightarrow Q$ が使える性質

であるとき， Q を新たに使える性質として導ける

モードゥス・トレンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・トレンス (モーダス・トレンス)

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

つまり，

- ▶ $P \rightarrow Q$ が使える性質
- ▶ $\neg Q$ が使える性質

であるとき， $\neg P$ を新たに使える性質として導ける

仮言三段論法

任意の命題変数 P, Q, R に対して，次が成り立つ

仮言三段論法 (三段論法)

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

つまり，

- ▶ $P \rightarrow Q$ が使える性質
- ▶ $Q \rightarrow R$ が使える性質

であるとき， $P \rightarrow R$ を新たに使える性質として導ける

選言三段論法

任意の命題変数 P, Q に対して, 次が成り立つ

選言三段論法

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$$

つまり,

- ▶ $P \vee Q$ が使える性質
- ▶ $\neg P$ が使える性質

であるとき, Q を新たに使える性質として導ける

推論の類型 (再掲)

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「 $P \Rightarrow Q$ 」であるとき、
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある \rightsquigarrow それをまず紹介

- ▶ モーダウス・ポネンス
- ▶ モーダウス・トレンス
- ▶ 仮言三段論法
- ▶ 選言三段論法

これらを用いて証明を行っていく

目次

- ① 推論とその類型
- ② 部分集合に関する重要な性質
- ③ 部分集合に関する性質の証明
- ④ 今日のまとめ

部分集合：定義 (復習)

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは、

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

記号で書けば、 $x \in A \rightarrow x \in B$

部分集合の記法

A が B の部分集合であることを「 $A \subseteq B$ 」と表記する
(「 $A \subset B$ 」や「 $A \subsetneq B$ 」と表記することもある)

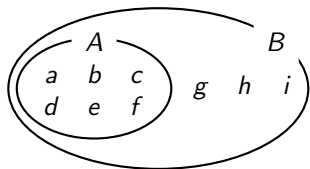
次の2つの集合を考える

▶ $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

▶ $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



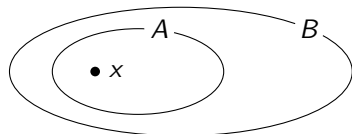
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して、

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

オイラー図による直感



注意: 「ならば」の前の部分 (仮定) を満たすように図を描く

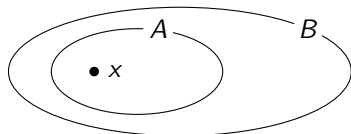
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

オイラー図による直感



注意: 「ならば」の前の部分 (仮定) を満たすように図を描く

「 \sim ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「 \sim であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「 \sim である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

証明 :

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $x \in A$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ かつ $A \subseteq B$ ならば, $x \in B$ である
- 4 $x \in B$ である
- 5 したがって, $x \in B$ である □

例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

証明:

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と部分集合の定義より, 「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つ.

- 5 したがって, $x \in B$ である □

部分集合とは? (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

証明:

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と部分集合の定義より, 「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つ.
- 4 (2) と (3) より, $x \in B$ が成り立つ.
- 5 したがって, $x \in B$ である □

モーダス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

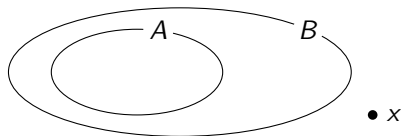
例題 2

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば, } x \notin A$$

オイラー図による直感



証明は演習問題 (ヒント: モードゥス・トレンスを用いる)

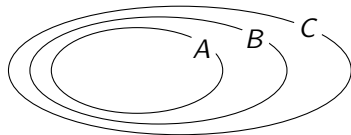
例題 3

次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば, } A \subseteq C$$

オイラー図による直感



格言 (第4回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 3

証明 :

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $B \subseteq C$ であると仮定する

8 したがって, $A \subseteq C$ となる

部分集合とは? (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明 :

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $B \subseteq C$ であると仮定する

8 したがって, $A \subseteq C$ となる

証明したいことは, 「 $x \in A$ ならば $x \in C$ 」

部分集合とは? (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する

7 したがって、 $x \in C$ が成り立つ

8 したがって、 $A \subseteq C$ となる

証明したいことは、「 $x \in A$ ならば $x \in C$ 」

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明 :

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する

- 7 したがって, $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって, $A \subseteq C$ となる

□

例題 3

証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である

7 したがって、 $x \in C$ が成り立つ

8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より、 $x \in B$ ならば $x \in C$ である

- 7 したがって、 $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より、 $x \in B$ ならば $x \in C$ である
- 6 (4) と (5) より、 $x \in A$ ならば $x \in C$ となる
- 7 したがって、 $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

仮言三段論法

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

例題 3

証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より、 $x \in B$ ならば $x \in C$ である
- 6 (4) と (5) より、 $x \in A$ ならば $x \in C$ となる
- 7 したがって、(3) と (6) より、 $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

例題 3

別証明 :

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また, $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より, $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より, $x \in B$ ならば $x \in C$ である

- 7 したがって, $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって, $A \subseteq C$ となる



例題 3

別証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より、 $x \in B$ ならば $x \in C$ である
- 6 (3) と (4) より、 $x \in B$ が成り立つ
- 7 したがって、 $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

例題 3

別証明：

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 また、 $B \subseteq C$ であると仮定する
- 3 $x \in A$ であると仮定する
- 4 (1) と部分集合の定義より、 $x \in A$ ならば $x \in B$ である
- 5 (2) と部分集合の定義より、 $x \in B$ ならば $x \in C$ である
- 6 (3) と (4) より、 $x \in B$ が成り立つ
- 7 したがって、(5) と (6) より、 $x \in C$ が成り立つ
- 8 したがって、 $A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

部分集合に関する重要な性質：復習

次の3つはいずれも正しい

例題 1

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば, } x \in B$$

例題 2

任意の集合 A, B と任意の x に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば, } x \notin A$$

例題 3

任意の集合 A, B, C に対して,

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば, } A \subseteq C$$

今後断りなく、この3つを (再度証明せずに) 用いることがある

目次

- ① 推論とその類型
- ② 部分集合に関する重要な性質
- ③ 部分集合に関する性質の証明
- ④ 今日のまとめ

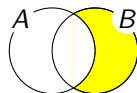
例題 4

次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して,

$$(A \cup B) - A \subseteq B$$

オイラー図による直感



格言 (第4回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 4

証明 :

7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である



例題 4

証明：

1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する

6 したがって, $x \in B$ が成り立つ

7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 4

証明：

- 1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
- 2 (1) と集合差の定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ

6 したがって, $x \in B$ が成り立つ

7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

集合差の定義

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

例題 4

証明：

- 1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
- 2 (1) と集合差の定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
- 3 (2) より, $x \in A \cup B$ が成り立つ

6 したがって, $x \in B$ が成り立つ

7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

推論規則 (\wedge の除去)

(演習問題)

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

例題 4

証明：

- 1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
- 2 (1) と集合差の定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
- 3 (2) より, $x \in A \cup B$ が成り立つ
- 4 同じく (2) より, $x \notin A$ が成り立つ

- 6 したがって, $x \in B$ が成り立つ
- 7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

推論規則 (\wedge の除去)

(演習問題)

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

例題 4

証明：

- 1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
- 2 (1) と集合差の定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
- 3 (2) より, $x \in A \cup B$ が成り立つ
- 4 同じく (2) より, $x \notin A$ が成り立つ
- 5 (3) と合併の定義より, $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ
- 6 したがって, $x \in B$ が成り立つ
- 7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

合併の定義

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ または } x \in B$$

例題 4

証明：

- 1 $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
- 2 (1) と集合差の定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
- 3 (2) より, $x \in A \cup B$ が成り立つ
- 4 同じく (2) より, $x \notin A$ が成り立つ
- 5 (3) と合併の定義より, $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ
- 6 したがって, (4) と (5) より, $x \in B$ が成り立つ
- 7 したがって, $(A \cup B) - A \subseteq B$ である □

選言三段論法

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$$

例題 5

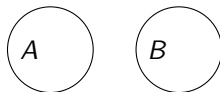
次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ.

オイラー図による直感



例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する

7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ



例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する

7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

部分集合とは? (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と空集合の定義より, $x \notin A \cap B$ が成り立つ

7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

空集合の定義

要素を持たない集合を空集合と呼び, \emptyset と表記する

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と空集合の定義より, $x \notin A \cap B$ が成り立つ
- 4 (3) と共通部分の定義より, $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ

7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

共通部分の定義

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in B$$

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と空集合の定義より, $x \notin A \cap B$ が成り立つ
- 4 (3) と共通部分の定義より, $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ

7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

共通部分の定義とド・モルガンの法則より

$$x \notin A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \text{ または } x \notin B$$

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と空集合の定義より, $x \notin A \cap B$ が成り立つ
- 4 (3) と共通部分の定義より, $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ
- 5 (2) と (4) より, $x \notin B$ が成り立つ

- 7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

選言三段論法

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Leftrightarrow Q$$

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

- 1 $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
- 2 $x \in A$ であると仮定する
- 3 (1) と空集合の定義より, $x \notin A \cap B$ が成り立つ
- 4 (3) と共通部分の定義より, $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ
- 5 (2) と (4) より, $x \notin B$ が成り立つ
- 6 (2) と (5) と集合差の定義より, $x \in A - B$ が成り立つ
- 7 したがって, $A \subseteq A - B$ が成り立つ □

集合差の定義

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

例題 6

次の命題は正しいか、正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \subseteq B \quad \text{ならば,} \quad 2^A \subseteq 2^B$$

が成り立つ.

例 : $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ のとき

▶ $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

▶ $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

この例においては正しい

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例 : 正しい. 理由は以下の通りである.

1 $A \subseteq B$ であると仮定する

6 したがって, $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ



例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する

5 $X \in 2^B$ が成り立つ

6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より、 $X \subseteq A$ が成り立つ

- 5 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

冪集合の定義

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より, $X \subseteq A$ が成り立つ
- 4 (1) と (3) より, $X \subseteq B$ が成り立つ
- 5 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって, $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

部分集合の性質

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば, } A \subseteq C$$

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より、 $X \subseteq A$ が成り立つ
- 4 (1) と (3) より、 $X \subseteq B$ が成り立つ
- 5 (4) と冪集合の定義より、 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

冪集合の定義

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

目次

- ① 推論とその類型
- ② 部分集合に関する重要な性質
- ③ 部分集合に関する性質の証明
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- ▶ 推論の類型として、4つの推論規則が使えるようになる
 - ▶ モーダウス・ポネンス
 - ▶ モーダウス・トレンス
 - ▶ 仮言三段論法
 - ▶ 選言三段論法

(注：この4つの推論規則の名称は重要ではない)

補足

別の推論、証明法は今後登場するときに紹介する

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 推論とその類型
- ② 部分集合に関する重要な性質
- ③ 部分集合に関する性質の証明
- ④ 今日のまとめ