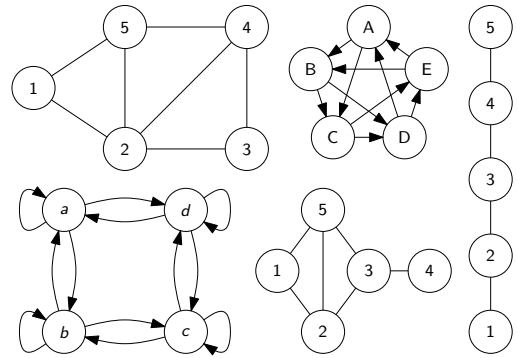


- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ



有向グラフとは？

有向グラフとは、順序対 (V, A) で、

- ▶ V は集合
- ▶ $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるものこと

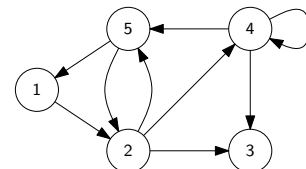
例：

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

注意

$(1, 2) \neq (2, 1)$

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



離散数学 第 16 回
補講：グラフ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 7 月 31 日

最終更新：2015 年 7 月 31 日 14:43

スケジュール 前半

- ① 集合と論理 (1)：命題論理 (4月10日)
- ② 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4月17日)
- ③ 集合と論理 (3)：述語論理 (4月24日)
- ④ 証明法 (1)： \exists と \forall を含む命題の証明 (5月1日)
- ⑤ 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5月8日)
- ⑥ 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (5月15日)
- ⑦ 証明法 (3)：集合に関する証明 (5月22日)
- ⑧ 写像 (1)：像と逆像 (5月29日)
- ⑨ 写像 (2)：全射と単射 (6月5日)
- 中間試験 (6月12日)

スケジュール 後半

- ⑩ 関係 (1)：関係 (6月19日)
- ⑪ 関係 (2)：同値関係 (6月26日)
- ⑫ 関係 (3)：順序関係 (7月3日)
- ⑬ 関係 (4)：関係の閉包 (7月10日)
- ⑭ 証明法 (4)：数学的帰納法 (7月17日)
- ⑮ 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7月24日)
- 補講：グラフ (西 8-131) (7月31日)
- 期末試験 (西 8-131) (8月7日)

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解し，グラフに関する用語を正しく用いることができるようになる
- ▶ グラフの同型性を理解し，同型であるか判定できるようになる

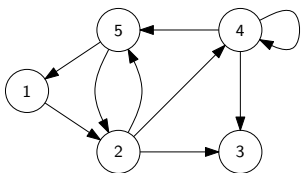
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の頂点と呼ぶ
- ▶ A の要素を G の弧と呼ぶ
- ▶ V を G の頂点集合と呼ぶ
- ▶ A を G の弧集合と呼ぶ
- ▶ 弧 $(u, v) \in A$ に対して、 u はその始点であり、 v はその終点である

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- ▶ 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点、頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは、順序対 (V, E) で、

- ▶ V は集合
- ▶ $E \subseteq 2^V$ は V の要素数 2 の部分集合の集合であるものこと

例：

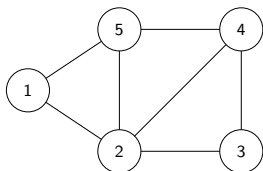
- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

注意

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

無向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



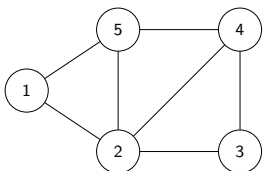
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

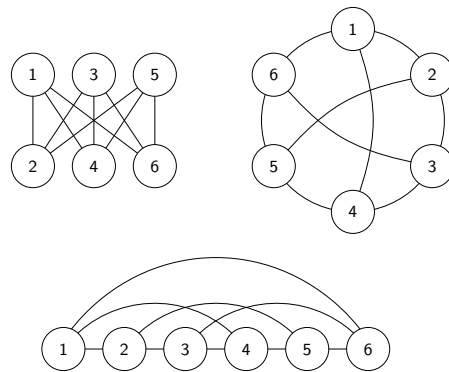
無向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の頂点と呼ぶ
- ▶ E の要素を G の辺と呼ぶ
- ▶ V を G の頂点集合と呼ぶ
- ▶ E を G の辺集合と呼ぶ
- ▶ 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して、 u, v をその端点と呼ぶ

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▶ 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点



1つのグラフに対するいろいろな図示

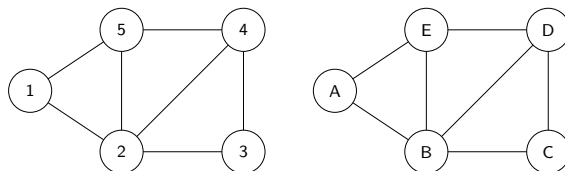


目次

- 1 グラフ
- 2 同型なグラフ
- 3 再構成予想
- 4 今日のまとめ

「同じ」グラフとは？ (1)

次の2つのグラフを見てみる



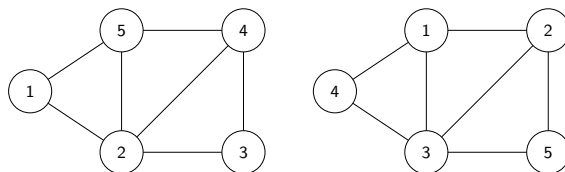
- ▶ 頂点同士の「つながり方」は同じである
- ▶ しかし、頂点集合、辺集合は異なる
- ▶ したがって、この2つは「同じグラフではない」

でも「同じである」と見なしたい

そうなるような同値関係を与えてみる

「同じ」グラフとは？ (2)

次の2つのグラフを見てみる



- ▶ 頂点同士の「つながり方」は同じである
- ▶ しかし、辺集合は異なる
- ▶ したがって、この2つは「同じグラフではない」

でも「同じである」と見なしたい

そうなるような同値関係を与えてみる

同型写像 (有向グラフの場合)

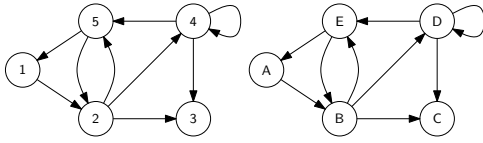
2つの有向グラフ $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への同型写像とは、全単射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ で次を満たすもの

▶ 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して、

$$(u, v) \in A_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$$



$$\varphi(1) = A, \varphi(2) = B, \varphi(3) = C, \varphi(4) = D, \varphi(5) = E$$

同型写像 (無向グラフの場合)

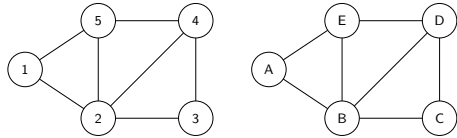
2つの無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への同型写像とは、全単射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ で次を満たすもの

▶ 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して、

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$



$$\varphi(1) = A, \varphi(2) = B, \varphi(3) = C, \varphi(4) = D, \varphi(5) = E$$

同型なグラフ

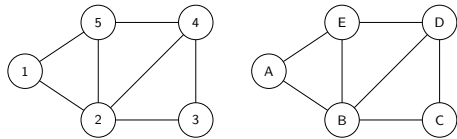
同型なグラフとは？

G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき、 G_1 と G_2 は同型であるといい、

$$G_1 \simeq G_2$$

と書き表す

次の2つのグラフは同型



同型である、という関係は同値関係

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

▶ 「 \simeq 」は Γ 上の関係

\simeq の重要な性質

\simeq は Γ 上の同値関係

つまり、 \simeq は次の3つの性質を満たす

- ▶ 任意の $G \in \Gamma$ に対して、 $G \simeq G$ (反射性)
- ▶ 任意の $G_1, G_2 \in \Gamma$ に対して、 $G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ (対称性)
- ▶ 任意の $G_1, G_2, G_3 \in \Gamma$ に対して、 $G_1 \simeq G_2$ かつ $G_2 \simeq G_3$ ならば $G_1 \simeq G_3$ (推移性)

\simeq の反射性：証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して、 $G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、同型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ が存在する

さらに、定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、全単射 $\varphi: V \rightarrow V$ で次を満たすものが存在する

▶ 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して、

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$$

証明の方針：そのような全単射 φ を実際に構成する

\simeq の反射性：証明 (2)

▶ 任意の無向グラフ G に対して、 G から G への同型写像が存在することを証明すればよい。

▶ すなわち、任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、全単射 $\varphi: V \rightarrow V$ で次を満たすものが存在することを証明すればよい。

▶ 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して、

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

▶ そのような全単射として、恒等写像 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ を考える。

▶ このとき、任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\text{id}_V(u), \text{id}_V(v)\} \in E$$

である。

▶ したがって、 id_V は G から G への同型写像である。 □

\simeq の対称性と推移性の証明は演習問題

対称性に関するヒント

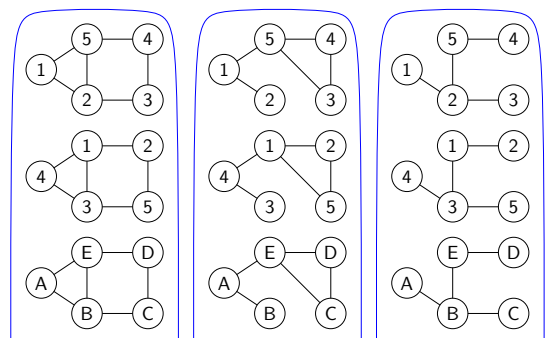
- ▶ 無向グラフ G_1, G_2 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像 φ が存在すると仮定する
- ▶ φ は全単射なので、逆写像 φ^{-1} が存在し、それも全単射 (補足問題 9.5, 9.7 参照)
- ▶ φ^{-1} が G_2 から G_1 への同型写像になることを証明すればよい

推移性に関するヒント

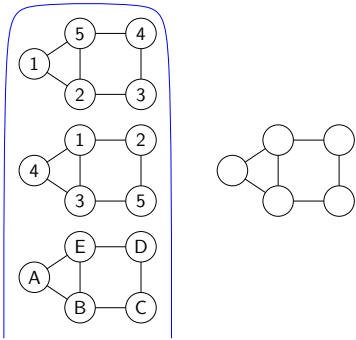
- ▶ 無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像 φ_1 と G_2 から G_3 への同型写像 φ_2 が存在すると仮定する
- ▶ 合成関数 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ を考えると、 φ_1, φ_2 が全単射なので、これも全単射 (演習問題参照)
- ▶ $\varphi_2 \circ \varphi_1$ が G_1 から G_3 への同型写像になることを証明すればよい

グラフの同型類

商集合 Γ / \simeq の要素をグラフの同型類と呼ぶ

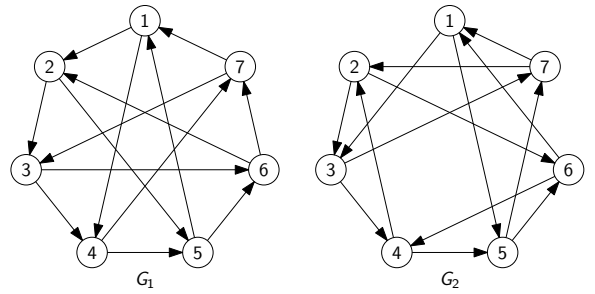


グラフの同型類の図示



例題：グラフの同型性 (2)

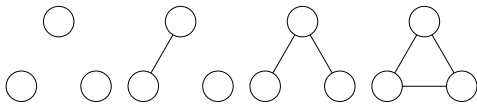
次の2つの有向グラフ G_1, G_2 に対して,
 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ



次で定められる φ は同型写像である

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 5, \varphi(5) = 7, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

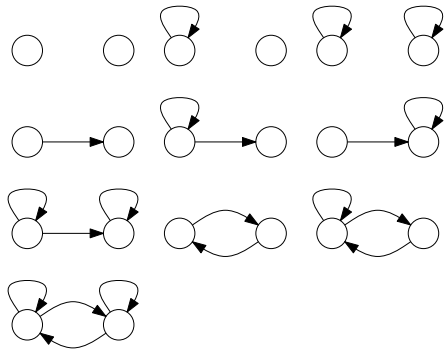
頂点数3の無向グラフの同型類すべて



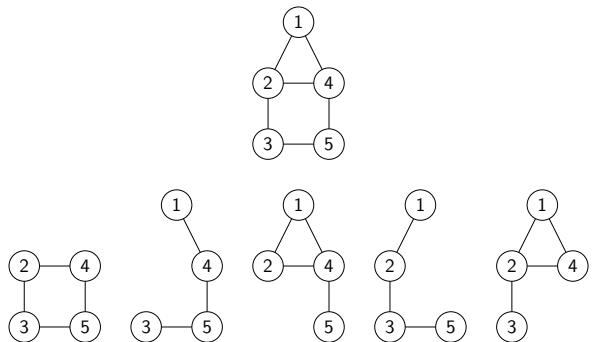
目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ

頂点数2の有向グラフの同型類すべて

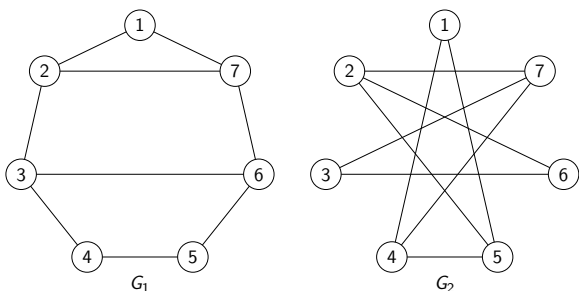


1つの頂点を取り除いたグラフを作成...



例題：グラフの同型性 (1)

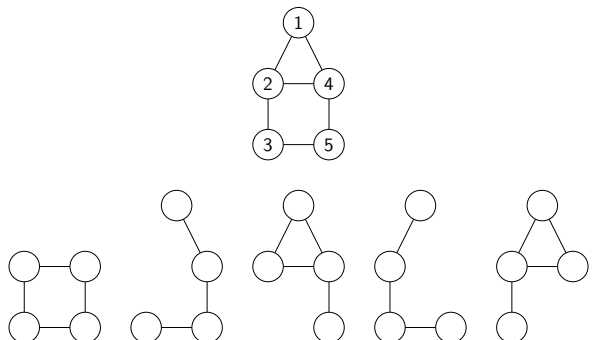
次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して,
 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ

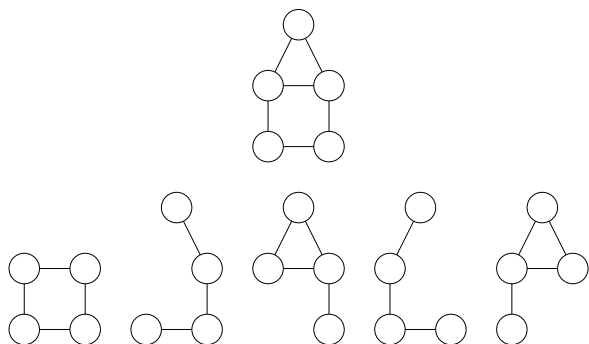
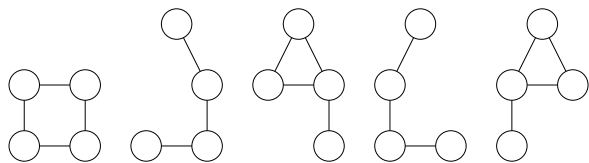


次で定められる φ は同型写像である

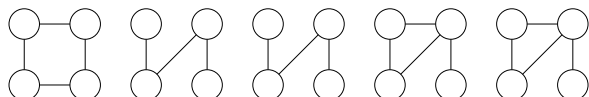
$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 5$$

ラベルを忘れる

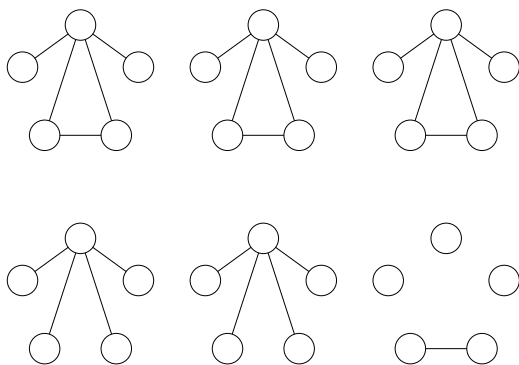




元のグラフは何でしょう？



元のグラフは何でしょう？



頂点数が 3 以上の無向グラフは一意的に再構成可能である

つまり、

G と H が頂点数 3 以上の 非同型 な無向グラフであるとき、 G から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストと H から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストは異なる

という予想

用語：デッキ

G から 1 頂点を取り除いてできたグラフの同型類のリストを G の **デッキ** と呼ぶ

再構成問題は、デッキから G (の同型類) を復元する問題

目次

- ① グラフ
- ② 同型なグラフ
- ③ 再構成予想
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解し, グラフに関する用語を正しく用いることができるようになる
- ▶ グラフの同型性を理解し, 同型であるか判定できるようになる

期末試験

- ▶ 日時：8 月 7 日 (金) 第 3 時限
- ▶ 教室：西 8 号館 131 教室 (いつもの場所)
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第 8 回講義の最初から第 15 回講義の最後まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
 - ▶ その中の 3 題は講義の演習問題として提示されたものと同じ
 - ただし, 発展問題は出題しない
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1 題 10 点満点, 計 60 点満点
- ▶ 時間：90 分
- ▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績

- ▶ $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK