

スケジュール 前半

- | | | |
|---|--|------------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (4 月 10 日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (4 月 17 日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (4 月 24 日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (5 月 1 日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (5 月 8 日) |
| 6 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (5 月 15 日) |
| 7 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (5 月 22 日) |
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (5 月 29 日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (6 月 5 日) |
| | • 中間試験 | (6 月 12 日) |

注意 : 予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|-------------|
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (6 月 19 日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (6 月 26 日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (7 月 3 日) |
| 13 | 関係 (4) : 関係の閉包 | (7 月 10 日) |
| 14 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (7 月 17 日) |
| 15 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (7 月 24 日) |
| | • 補講 | (7 月 31 日?) |
| | • 期末試験 | (8 月 7 日?) |

注意 : 予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)

格言

順序関係は階層性を扱うための道具

階層 : ヒエラルキー

(半) 順序 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは?

R が半順序であるとは, 次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
- ▶ R は反対称性を持つ
- ▶ R は推移性を持つ

- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
- ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
- ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$

全順序 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは?

R が全順序であるとは, 次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
- ▶ R は反対称性を持つ
- ▶ R は推移性を持つ
- ▶ R は完全性を持つ

- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
- ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
- ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$
- ▶ 完全性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ または $y R x$

半順序を表す記号

半順序を表すために, R ではなくて, 特別な記号を使うことが多い

半順序を表す記号の例

- ▶ \leq
- ▶ \preceq
- ▶ \leqq
- ▶ \preccurlyeq
- ▶ \sqsubseteq
- ▶ \dots

その否定を表す記号の例

- ▶ $\not\leq$
- ▶ $\not\preceq$
- ▶ $\not\leqq$
- ▶ $\not\preccurlyeq$
- ▶ $\not\sqsubseteq$
- ▶ \dots

状況に応じて, 使い分けられたりする
(この講義では専ら「 \preceq 」を用いていく)

半順序集合と全順序集合

半順序集合とは?

集合 A と A 上の半順序 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を半順序集合と呼ぶ

全順序集合とは?

集合 A と A 上の全順序 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を全順序集合と呼ぶ

1 ハッセ図

2 上界と下界

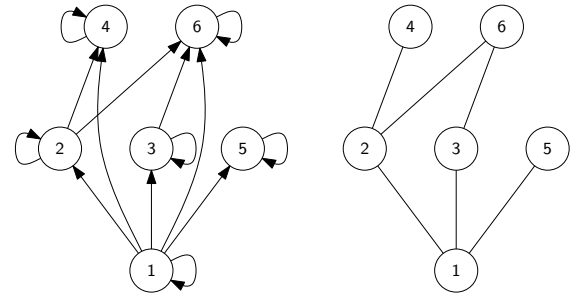
- 3 その他の用語
 - 極大元, 極小元
 - 最大元, 最小元
 - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)

4 今日のまとめ

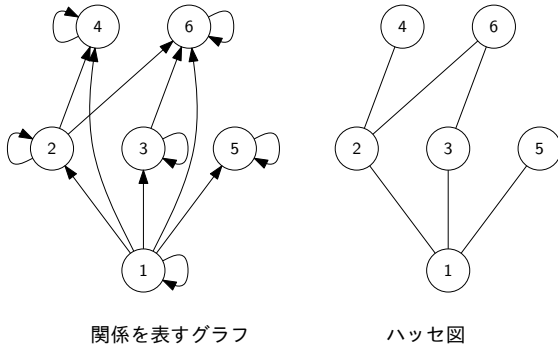
ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (2) \preceq において大きい要素ほど上に描く



ハッセ図: とりあえず例を見てみる



関係を表すグラフ

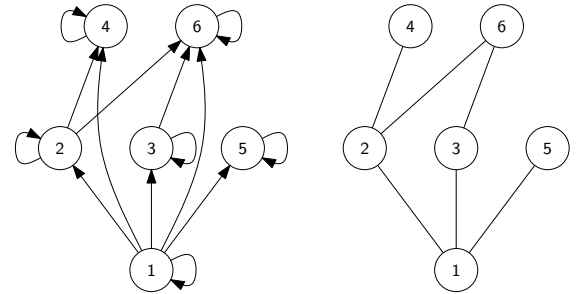
ハッセ図

ハッセ図

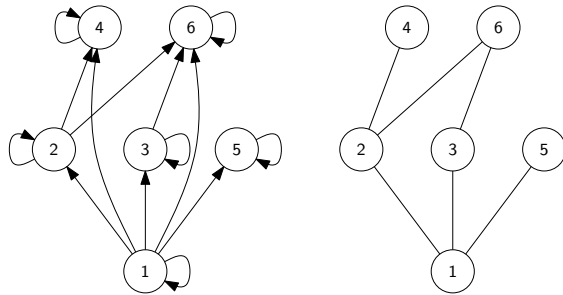
ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (3) $x \preceq y$ で、 x から y へ「遠回り」がないとき、 x と y を線で結ぶ



ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの

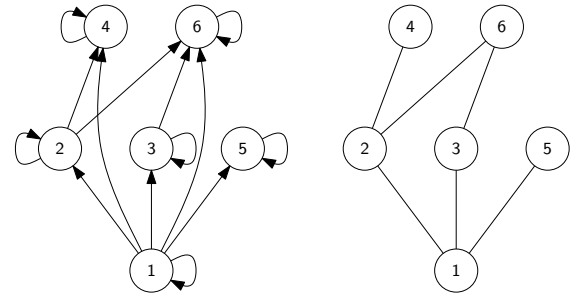


ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (4) どの線も下から上へ単調に描かれる

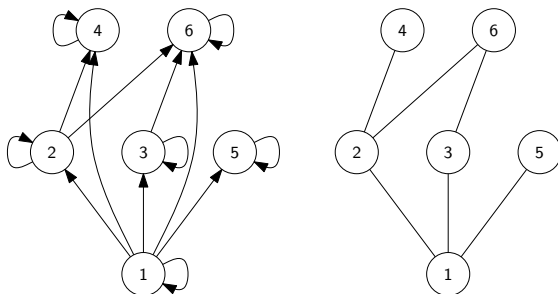


ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (1) A の各要素を点として描く



比較可能性と比較不能性

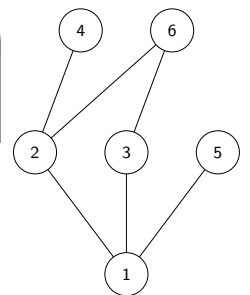
半順序集合 (A, \preceq)

比較可能とは?

- $x, y \in A$ が比較可能であるとは $x \preceq y$ または $y \preceq x$ であること
- そうでないとき、 x, y は比較不能

例:

- 2 と 6 は比較可能
- 1 と 4 は比較可能
- 2 と 3 は比較不能
- 4 と 6 は比較不能



格言

比較不能なものを扱える半順序思考

比較可能性と比較不能性：ハッセル図において

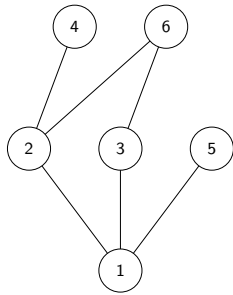
半順序集合 (A, ≼)

ハッセル図で比較可能性を読み取る

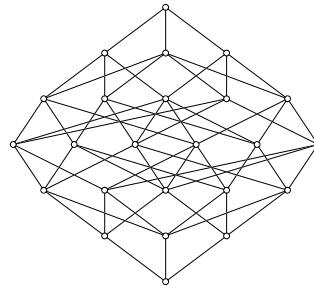
- ▶ $x, y \in A$ が比較可能である \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在する
- ▶ $x, y \in A$ が比較可能でない \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在しない

例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能

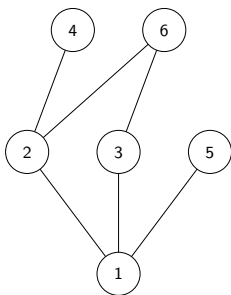


いろいろな半順序集合 (4)

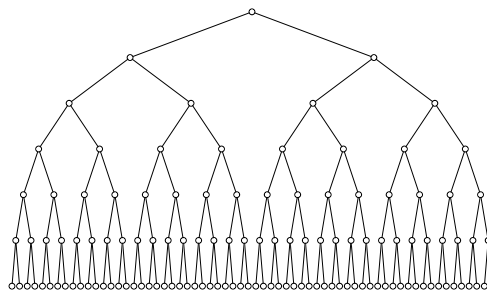


いろいろな半順序集合 (1)

({1, 2, 3, 4, 5, 6}, |) (「 $a | b$ 」とは「 a は b の約数」の意味)



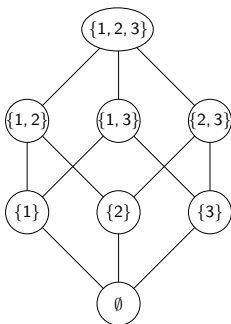
いろいろな半順序集合 (5)



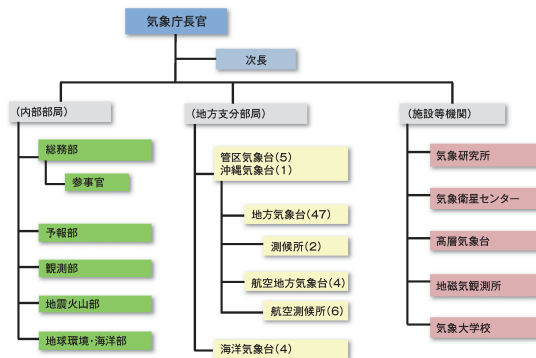
根付き木と呼ばれる (正確な定義はしない)

いろいろな半順序集合 (2)

($2^{\{1,2,3\}}$, \subseteq)



半順序集合の例 (1)：階層的組織



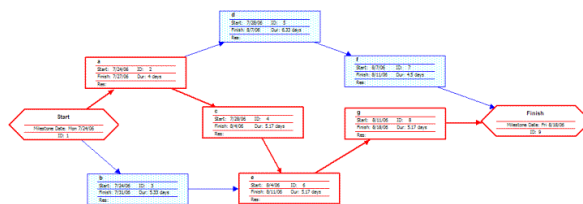
<http://www.jma.go.jp/jma/kishou/intro/gyomu/index3.html>

いろいろな半順序集合 (3)

({1, 2, 3, 4}, \leq)



半順序集合の例 (2)：先行関係を持つジョブのスケジューリング



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pert.example.network.diagram.gif>

半順序集合 (A, \preceq) について

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」であることを「 $b \succeq a$ 」とも書く
- ▶ 「 $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ 」であることを「 $a < b$ 」と書く
- ▶ 「 $a < b$ 」であることを「 $b > a$ 」とも書く

注意

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」と「 $a > b$ 」が同値であるとは限らない
- ▶ ただし、 \preceq が全順序ならば、この2つは同値 (演習問題)

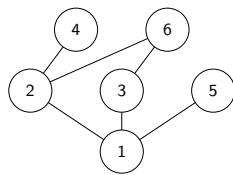
例:

- ▶ 半順序集合 $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ において、 $\{2,3\} \not\subseteq \{1\}$ であるが、 $\{2,3\} \cap \{1\}$ ではない
- ▶ 全順序集合 $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ において、 $3 \leq 2$ であり、すなわち、 $3 > 2$ である

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の**上界**とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 2 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

① ハッセ図

② 上界と下界

③ その他の用語

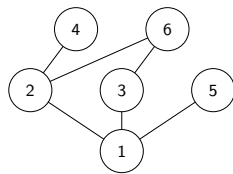
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)

④ 今日のまとめ

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の**上界**とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ $\{2,5\}$ の上界は存在しない
- ▶ $2 \preceq 1$ は不成立, $5 \preceq 1$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立, $5 \preceq 2$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 3$ は不成立, $5 \preceq 3$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立, $5 \preceq 4$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 5$ は不成立, $5 \preceq 5$ は成立
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $5 \preceq 6$ は不成立

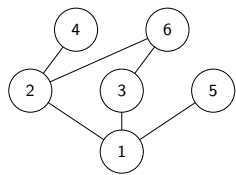
 B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の**上界**とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 6 は $\{2,3\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $3 \preceq 6$ は成立

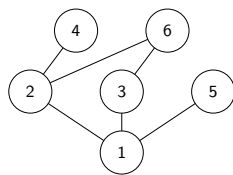
 B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の下界 (かかい) とは?

集合 B の**下界**とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $a \preceq b$



- ▶ 1 は $\{2,3\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2,6\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2,6\}$ の下界

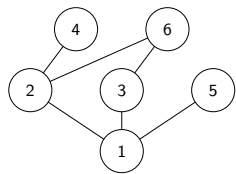
 B の下界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも下にある (あるいは同じ) もの

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

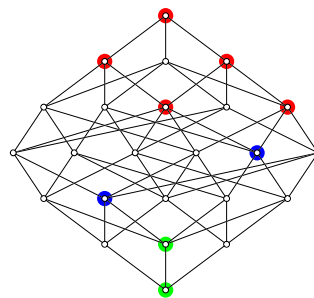
集合 B の**上界**とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 4 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの



- ▶ 赤は青の2要素から成る集合の上界
- ▶ 緑は青の2要素から成る集合の下界

① ハッセ図

② 上界と下界

③ その他の用語

- 極大元, 極小元
- 最大元, 最小元
- 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)

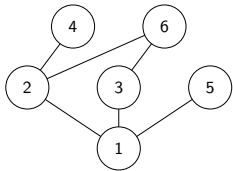
④ 今日のまとめ

極大元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極大元 (極大要素) とは?

集合 B の極大元とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
 任意の $b' \in B$ に対して, $b \preceq b'$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元ではない
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元

B の極大元とは?: 直感的な説明

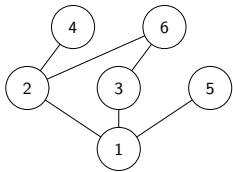
B の要素で, B の他の要素がそれより上にないもの

極小元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極小元 (極小要素) とは?

集合 B の極小元とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
 任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元ではない

B の極小元とは?: 直感的な説明

B の要素で, B の他の要素がそれより下でないもの

極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合 (\mathbb{R}, \leq) (注: これは全順序集合でもある)
- ▶ $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき, B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して,
 「任意の $b' \in B$ に対して, $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の $b \in B$ に対して,
 「ある $b' \in B$ に対して, 『 $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 』ではない」

証明のために行うこと

- ▶ 任意の $b \in B$ を考える
- ▶ b を使って, $b \leq b'$ であるが, $b = b'$ とならない $b' \in B$ を見つける

最大元が存在しない例: 証明

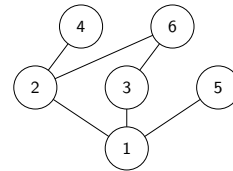
- ▶ 任意の $b \in (0, 1)$ を考える.
- ▶ $b' = \frac{b+1}{2}$ とする.
- ▶ $b > 0$ なので, $b' = \frac{b+1}{2} > \frac{0+1}{2} > 0$.
- ▶ また, $b < 1$ なので, $b' = \frac{b+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$.
- ▶ したがって, $b' \in (0, 1)$.
- ▶ $b < 1$ なので, $b = \frac{b+b}{2} < \frac{b+1}{2} = b'$.
- ▶ したがって, ある $b' \in (0, 1)$ が存在して, $b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる.
- ▶ したがって, $(0, 1)$ の最大元は存在しない. □

最大元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最大元 (最大要素) とは?

集合 B の最大元とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
 任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元ではない
- ▶ 6 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最大元は存在しない

B の最大元とは?: 直感的な説明

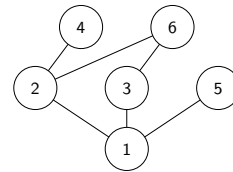
B の要素で, B の他のどの要素よりも大きいもの

最小元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最小元 (最小要素) とは?

集合 B の最小元とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
 任意の $b' \in B$ に対して $b \preceq b'$



- ▶ 2 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元ではない
- ▶ 1 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最小元は存在しない

B の最小元とは?: 直感的な説明

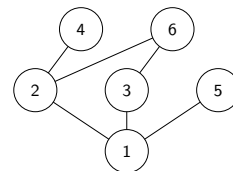
B の要素で, B の他のどの要素よりも小さいもの

上限 (最小上界)

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上限とは?

集合 B の上限とは, B の上界 $a \in A$ で, 次を満たすもの
 B の任意の上界 $a' \in A$ に対して $a \preceq a'$



- ▶ 6 は $\{2, 3\}$ の上限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の上限

B の上限とは?: 直感的な説明

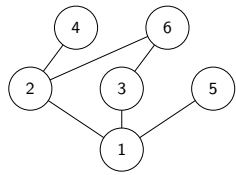
B の上界で, B の他のどの上界よりも小さいもの

下限 (最大下界)

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下限とは?

集合 B の **下限** とは, B の下界 $a \in A$ で, 次を満たすもの
 B の任意の下界 $a' \in A$ に対して $a' \preceq a$



- ▶ 1 は $\{2, 3\}$ の下限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下限

B の下限とは?: 直感的な説明

B の下界で, B の他のどの下界よりも大きいもの

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

様々な性質と記法

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

性質 (証明は演習問題)

- ▶ B の最大元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最大元は, 存在するならば, B の極大元でもある.
- ▶ B の上界は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最小元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最小元は, 存在するならば, B の極小元でもある.
- ▶ B の下限は, 存在するならば, ただ一つ.

記法

存在するとき,
 B の最大元を $\max B$ と, B の上界を $\sup B$ と,
 B の最小元を $\min B$ と, B の下限を $\inf B$ と表記することがある

目次

- 1 ハッセ図
- 2 上界と下界
- 3 その他の用語
 - 極大元, 極小元
 - 最大元, 最小元
 - 上界 (最小上界), 下限 (最大下界)
- 4 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上界 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)