

- ① 対応をつけることと数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

離散数学 第9回
写像 (2) : 全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年6月5日

最終更新 : 2015年6月7日 08:17

マンツーマンディフェンス



全単射の例

新幹線の指定席



単射の例

目次

- ① 対応をつけることと数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

スケジュール 前半 (予定)

- | | |
|--|---------|
| ① 集合と論理 (1) : 命題論理 | (4月10日) |
| ② 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (4月17日) |
| ③ 集合と論理 (3) : 述語論理 | (4月24日) |
| ④ 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (5月1日) |
| ⑤ 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (5月8日) |
| ⑥ 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (5月15日) |
| ⑦ 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (5月22日) |
| ⑧ 写像 (1) : 像と逆像 | (5月29日) |
| ⑨ 写像 (2) : 全射と単射 | (6月5日) |
| • 中間試験 | (6月12日) |

注意 : 予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | |
|------------------------|---------|
| ⑩ 関係 (1) : 関係 | (6月19日) |
| ⑪ 関係 (2) : 同値関係 | (6月26日) |
| ⑫ 関係 (3) : 順序関係 | (7月3日) |
| ⑬ 関係 (4) : 関係の閉包 | (7月10日) |
| ⑭ 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (7月17日) |
| ⑮ 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (7月24日) |
| • 授業等調整日 (予備日) | (7月31日) |
| • 期末試験 | (8月7日?) |

注意 : 予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

全射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全射とは？

f が全射であるとは、次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$

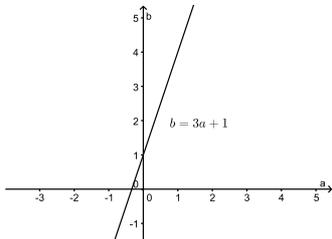


例題 1

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$



例題 1：続き

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ (ここで、「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$ 」となることを証明する)
- ▶ したがって、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 f は全射である。 □

「～が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える。

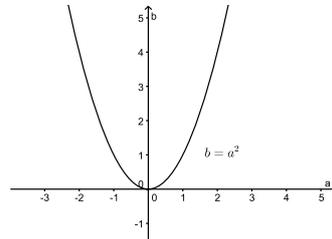
- ▶ $a = \frac{b-1}{3}$ とする。
- ▶ $b \in \mathbb{R}$ なので、 $a \in \mathbb{R}$ である。
- ▶ また、 $3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$ となる。
- ▶ したがって、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 f は全射である。 □

例題 2

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$



例題 2：続き

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $b \neq a^2$

「～が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 2：証明

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

証明： $-1 \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ (ここで、「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$ 」を証明する。)
- ▶ したがって、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$ 。
- ▶ したがって、 f は全射でない。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2 : 証明

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。
 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

証明: $-1 \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ 任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える。
- ▶ このとき, $a^2 \geq 0$ なので, $-1 \neq a^2$.
- ▶ したがって, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-1 \neq a^2$.
- ▶ したがって, f は全射でない。 □

補足: 始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも, 始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの写像は全射か?

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

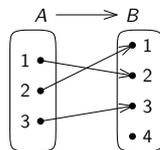
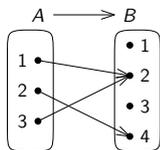
- 1 対応をつけることと数えること
- 2 全射
- 3 単射
- 4 全単射と逆写像
- 5 今日のまとめ

単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

単射とは?

f が単射であるとは, 次を満たすこと
 任意の $a, a' \in A$ に対して, $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$



例題 3

例題 3

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ。
 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して, $3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3 : 証明

例題 3

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ。
 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

証明: 任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ $3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する。
- ▶ このとき, $a = a'$ である。
- ▶ したがって, f は単射である。 □

例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ。
 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して, $a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$ 」ではない

整理する

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ が存在して「 $a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$ 」ではない

つまり, $a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ。
 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

証明: $a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ このとき, $a^2 = 4 = a'^2$ であるが, $a \neq a'$ である。
- ▶ したがって, f は単射でない。 □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

- 1 対応をつけること と 数えること
- 2 全射
- 3 単射
- 4 全単射と逆写像
- 5 今日のまとめ

全単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

f が全単射であるとは、全射であり、かつ、単射であること

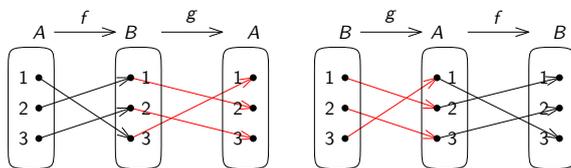


逆写像

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの ($\text{id}_A: A \rightarrow A, \text{id}_B$ は恒等写像)



この f の逆写像は存在する

記法

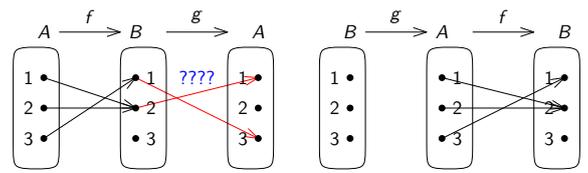
f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像：存在しない場合

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの ($\text{id}_A: A \rightarrow A, \text{id}_B$ は恒等写像)



この f の逆写像は存在しない

記法

f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像が存在するための必要十分条件

集合 A, B , 写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像が存在するための必要十分条件 (重要)

写像 f の逆写像が存在する $\Leftrightarrow f$ が全単射

証明は (長くなるので) 演習問題

全単射の逆写像 (1)

f が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像 } \Leftrightarrow g \circ f = \text{id}_A$$

つまり、 f が全単射であるとき、 $f \circ g = \text{id}_B$ という条件は不要

全単射の逆写像 (2)

f が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像 } \Leftrightarrow f \circ g = \text{id}_B$$

例題 5

例題 5

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1, 3), その逆写像 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が何であるか、答えよ。

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、 $f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$ とする

- ▶ この f^{-1} が f の逆写像であることを証明する
- ▶ 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(3a + 1) = \frac{(3a + 1) - 1}{3} = a$$

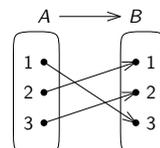
▶ したがって、 $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ となり、上の f^{-1} は f の逆写像である \square

逆写像と逆像：注意

注意

写像 $f: A \rightarrow B$

- ▶ $Y \subseteq B$ のとき、 $f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
- ▶ f が全単射であるうがなからうが定義される
- ▶ $b \in B$ のとき、 $f^{-1}(b)$ は f の逆写像 f^{-1} の b における値
- ▶ f が全単射であるときのみ定義される



- ▶ $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- ▶ $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- ▶ $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆写像も全単射 (演習問題)

目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK