

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--|---------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (4月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (4月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (4月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (5月1日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (5月8日) |
| 6 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (5月15日) |
| 7 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (5月22日) |
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (5月29日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (6月5日) |
| | • 中間試験 | (6月12日) |

注意 : 予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|---------|
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (6月19日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (6月26日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (7月3日) |
| 13 | 関係 (4) : 関係の閉包 | (7月10日) |
| 14 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (7月17日) |
| 15 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (7月24日) |
| | • 授業等調整日 (予備日) | (7月31日) |
| | • 期末試験 | (8月7日?) |

注意 : 予定の変更もありうる

中間試験

- ▶ 日時 : 6月12日 (金) 第3時限
- ▶ 教室 : 西8号館 131教室 (いつもの場所)
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第1回講義の最初から第7回講義の最後まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を6題出題する
 - ▶ その中の3題は講義の演習問題として提示されたものと同じ
 - ただし, 発展問題は出題しない
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点 : 1題10点満点, 計60点満点
- ▶ 時間 : 90分
- ▶ 持ち込み : A4用紙1枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績
▶ $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

今日の概要

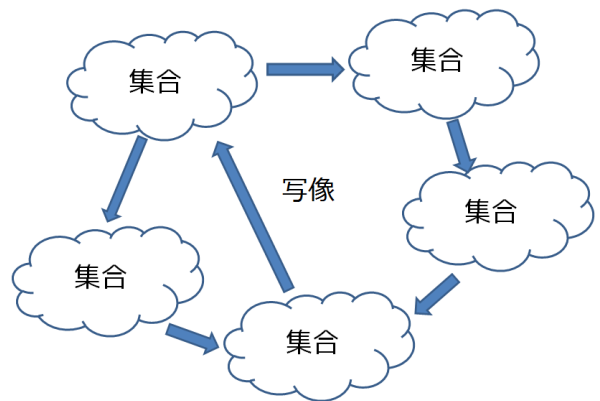
この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 写像 (関数) の定義と記法を理解し, 使えるようになる
- ▶ 写像による像と逆像, 写像の合成を理解する

ここまでのまとめ と ここからの話



写像 (関数)

目次

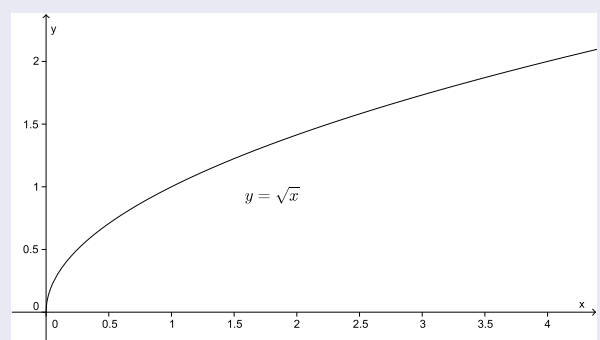
- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

写像 (関数)

関数と言って思い浮かべるものは? (1)

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



関数と言って思い浮かべるものは? (2)

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
    return a + b;
}

int absolute_value(int a) {
    if (a < 0) {
        return -a;
    } else {
        return a;
    }
}
```

写像とは

写像とは?

- ▶ 集合が2つある (AとBとする)
- ▶ Aの1つ1つの要素をBのある要素に「移す」

数学的に写像を定義すると?

- ▶ 任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して, a を b に移す

記法は?

- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$
- ▶ 任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in B$ が一意に存在して, $f(a) = b$

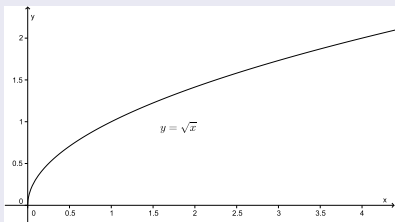
注: f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「写像」を「関数」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは? (1) 再掲

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



- ▶ $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
- ▶ 任意の $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは? (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
    return a + b;
}
```

- ▶ $\text{sum}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ 任意の $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\text{sum}((a, b)) = a + b$

関数と言って思い浮かべるものは? (2) 再掲 (続)

プログラミングの「関数」

```
int absolute_value(int a) {
    if (a < 0) {
        return -a;
    } else {
        return a;
    }
}
```

- ▶ $\text{absolute_value}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{absolute_value}(a) = \begin{cases} -a & (a < 0 \text{ のとき}) \\ a & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

発展的補足: 論理記号を用いて定義を書き直してみる

 f が A から B への写像であるとは

$$\forall a \in A (\exists! b \in B (f(a) = b))$$

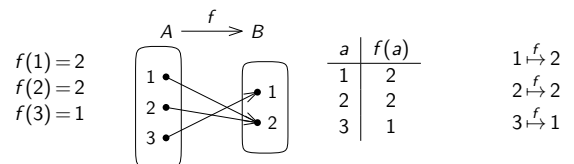
「 $\exists!$ 」は「一意に存在して～」を表す記号

「 $\exists!$ 」を書き直すと

$$\forall a \in A (\exists b \in B ((f(a) = b) \wedge (\forall b' \in B (f(a) = b' \rightarrow b = b'))))$$

写像の例

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$
- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次のように定義
 - ▶ $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$



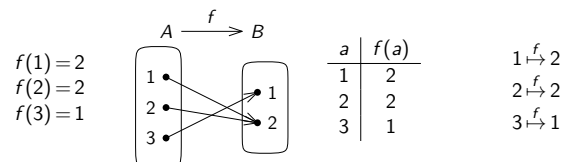
注意

「写像 $f: A \rightarrow B$ を定義する」ためには, 任意の $a \in A$ に対して, $f(a)$ が何であるかを定めればよい

写像にまつわる記法と用語

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

- ▶ $A \xrightarrow{f} B$
- ▶ $b = f(a)$ のとき 「 $f: a \mapsto b$ 」 や 「 $a \xrightarrow{f} b$ 」
- ▶ $f(a)$ を a における f の値という
- ▶ A を f の始域 (または定義域) という
- ▶ B を f の終域 という

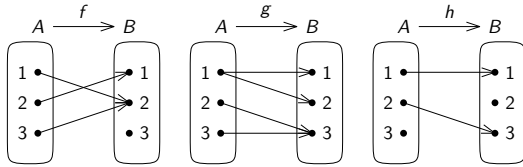


格言

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

問題：次の図の中で写像を表すものは？



2つの写像が等しいということ

集合 A, B, C, D と写像 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$ f と g が等しいとは？写像 f と g が等しいことを「 $f = g$ 」と書き、次の条件がすべて成り立つことと定義する

- ▶ $A = C$ (f と g の始域が等しい)
- ▶ $B = D$ (f と g の終域が等しい)
- ▶ すべての $a \in A$ に対して、 $f(a) = g(a)$ (写像の値が等しい)

恒等写像

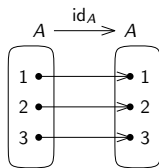
集合 A と写像 $f: A \rightarrow A$

恒等写像とは？

 f が恒等写像であるとは、任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- ▶ $A \rightarrow A$ の恒等写像を id_A と書くこともある
- ▶ 例： $A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f: A \rightarrow A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

① 写像 (関数)

② 像と逆像

③ 写像の合成

④ 証明の例題

⑤ 今日のまとめ

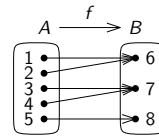
写像による像

 $f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

 f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例： $f(\{1, 2, 3\})$ は？

- ▶ $6 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？ $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $7 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？ $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $8 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？ $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって、 $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$

写像による像：他の例と注意

 $f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

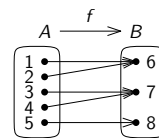
 f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

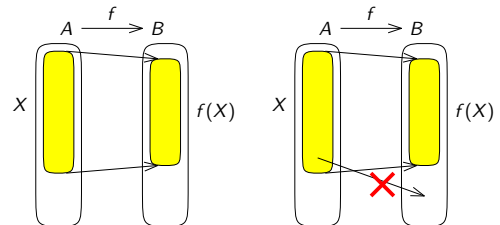
- ▶ X は A の部分集合 (A の要素ではない)
- ▶ $f(X)$ は B の部分集合

例



- ▶ $f(\{1, 2\}) = \{6\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{6, 7, 8\}$
- ▶ $f(\{2\}) = \{6\}$

写像による像：図による直感



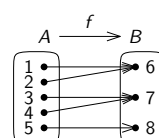
写像による逆像

 $f: A \rightarrow B$ を写像とする

逆像とは？

 f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例： $f^{-1}(\{6, 7\})$ は？

- ▶ $1 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？ $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $2 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？ $6 = f(2)$ なので YES
- ▶ $3 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？ $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $4 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？ $7 = f(4)$ なので YES
- ▶ $5 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？ $6 \neq f(5), 7 \neq f(5)$ なので NO

したがって、 $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

写像による逆像：他の例と注意

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

逆像とは？

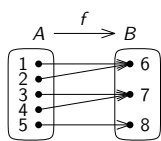
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- ▶ Y は B の部分集合 (B の要素ではない)
- ▶ $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例

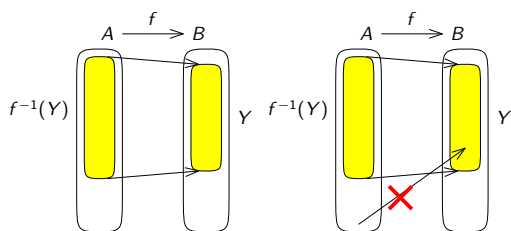


- ▶ $f^{-1}(\{6\}) = \{1, 2\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{7, 8\}) = \{3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 8\}) = \{1, 2, 5\}$

目次

- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

写像による逆像：図による直感



写像の合成

集合 A, B, C と写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

写像の合成とは？

写像 f と g の合成を $g \circ f: A \rightarrow C$ と表記し, 任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意: f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

像と逆像：注意 (1)

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$X \subseteq A$ から $f(X) \subseteq B$ は定まる

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$f^{-1}(Y) \subseteq A$ は $Y \subseteq B$ から定まる

像と逆像：注意 (2)

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

f という写像に対して, $f(X)$ という記法が使える

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

f という写像に対して, $f^{-1}(Y)$ という記法が使える

- ▶ 「 f^{-1} という写像に対して, $f^{-1}(Y)$ という記法が使える」というわけではない
- ▶ f の逆写像が存在しなくても, f による逆像は定義される (次回参照)

写像の合成：例 (続)

▶ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9\}$

▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次で定義

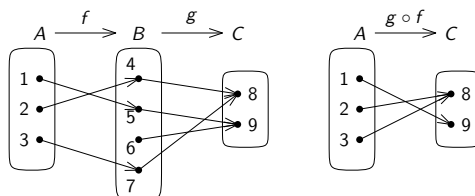
$$f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$$

▶ 写像 $g: B \rightarrow C$ を次で定義

$$g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$$

このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$



写像の合成：例 (続)

▶ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9\}$

▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次で定義

$$f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$$

▶ 写像 $g: B \rightarrow C$ を次で定義

$$g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$$

このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,



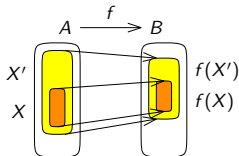
- ① 写像 (関数)
- ② 像と逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

例題 1

例題 1 : 次を証明せよ

任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の $X, X' \subseteq A$ に対して
 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$

図による直感



「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1 : 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- (ここで「 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ 」を証明する)
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である. □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

例題 1 : 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する.
 - (ここで仮定を用いて「 $f(X) \subseteq f(X')$ 」を証明する)
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である.
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である. □

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻ること」

「 $f(X) \subseteq f(X')$ 」を定義に立ち戻って書き換える

$b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$

例題 1 : 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する.
 - (ここで仮定を用いて「 $b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$ 」を証明する)
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である.
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である. □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

例題 1 : 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する.
- 2 $b \in f(X)$ であると仮定する.
 - (ここで仮定を用いて「 $b \in f(X')$ 」を証明する)
- 7 したがって, $b \in f(X')$ である.
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である.
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である. □

「 $b \in f(X')$ 」を定義に立ち戻って書き換える

ある $a \in X'$ が存在して, $b = f(a)$

「～が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する, といっているものを 1 つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 1 : 整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)

証明法: 「○○を満たす△△が存在する」が使えるとき (今回初登場)

- 1 「○○を満たす△△を考える」とする
- 2 その△△を使って, 証明を進める

例題 1 : 整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
- 5 $a \in X'$ ((1) と (4) より)

部分集合に関する重要な性質 (第 7 回講義より)

$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば, $x \in B$

例題 1: 整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
- 5 $a \in X'$ ((1) と (4) より)

注

(4) で考えた a が
「 $b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける」という目標の下で見つけた a

例題 1: 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する.
- 2 $b \in f(X)$ であると仮定する.
- 3 (2) より, ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ となる.
- 4 (3) より, $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える.
- 5 (1) と (4) より, $a \in X'$ となる.
- 6 **したがって, (4) で考えた a は $b = f(a)$ と $a \in X'$ を満たす.**
- 7 **したがって, $b \in f(X')$ である.**
- 8 **したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である.** □

目次

- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 写像 (関数) の定義と記法を理解し, 使えるようになる
- ▶ 写像による像と逆像, 写像の合成を理解する

余談: 「関数」という用語

『数学の言葉づかい 100』(日本評論社, 1999 年) 58 ページより

関数の用語 *functio* は 17 世紀末ライプニッツにより初めて用いられた.

(中略)

関数がよく f で表されるのはこれにちなむもので, 各国語でもこのラテン語の直訳として *function*, *Funktion*, *fonction*, (中略) などが用いられている. わが国へは中国で音訳された函数が輸入され, 現在では代用漢字による関数があてられて, 初等教育の段階でほぼ定着した.

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK