

離散数学 第6回
集合と論理 (4)：直積と冪集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年5月15日

最終更新：2015年6月3日 16:05

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|---|---------|
| 1 | 集合と論理 (1)：命題論理 | (4月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 | (4月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3)：述語論理 | (4月24日) |
| 4 | 証明法 (1)： \exists と \forall を含む命題の証明 | (5月1日) |
| 5 | 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 | (5月8日) |
| 6 | 集合と論理 (4)：直積と冪集合 | (5月15日) |
| 7 | 証明法 (3)：集合に関する証明 | (5月22日) |
| 8 | 写像 (1)：像と逆像 | (5月29日) |
| 9 | 写像 (2)：全射と単射 | (6月5日) |
| | • 中間試験 | (6月12日) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|--------------------|---------|
| 10 | 関係 (1)：関係 | (6月19日) |
| 11 | 関係 (2)：同値関係 | (6月26日) |
| 12 | 関係 (3)：順序関係 | (7月3日) |
| 13 | 関係 (4)：関係の閉包 | (7月10日) |
| 14 | 証明法 (4)：数学的帰納法 | (7月17日) |
| 15 | 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 | (7月24日) |
| | • 授業等調整日 (予備日) | (7月31日) |
| | • 期末試験 | (8月7日?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標

- ▶ 論理を用いて、部分集合を定義し、それを理解する
- ▶ 有限集合の要素数が計算できる
- ▶ 集合の直積と冪集合を理解し、正しく答えられる
- ▶ 集合の直積に関する等式を証明できる

- 1 集合の包含関係：部分集合
- 2 有限集合の要素数
- 3 集合の直積
- 4 冪集合
- 5 集合に対する等式の証明：直積
- 6 今日のまとめ

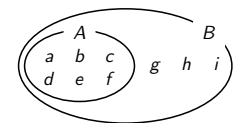
部分集合：直感

次の2つの集合を考える

- ▶ $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- ▶ $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合とは？ (直感)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは、
 A が B に含まれている (包含されている) こと

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは、

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

記号で書けば、 $x \in A \rightarrow x \in B$

部分集合の記法

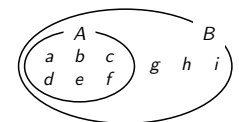
A が B の部分集合であることを「 $A \subseteq B$ 」と表記する
(「 $A \subset B$ 」や「 $A \subsetneq B$ 」と表記することもある)

次の2つの集合を考える

- ▶ $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- ▶ $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



同じ集合

 $A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して、 $A = B$ とは

$$x \in A \leftrightarrow x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して、 $A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

$$A = B \Leftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B$$

(= の定義)

$$\Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)$$

(実質含意)

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

(部分集合の定義)

同じ集合：まとめ

A = B の定義は？

集合 A, B に対して, $A = B$ とは

$$x \in A \leftrightarrow x \in B$$
 が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して, $A = B$ とは

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$
 が真となること (成り立つこと) と同じ

つまり,

集合が同じであることの言い換え

集合 A, B に対して

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

部分集合：重要な性質

空集合はすべての集合の部分集合である

任意の集合 A に対して,

$$\emptyset \subseteq A$$

証明: $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ が恒真式であることを示す

- ▶ $F \rightarrow x \in A$ は恒真式である
- ▶ $x \in \emptyset \Leftrightarrow F$ である
- ▶ したがって, $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ も恒真式である □

目次

- ① 集合の包含関係：部分集合
- ② 有限集合の要素数
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 集合に対する等式の証明：直積
- ⑥ 今日のまとめ

有限集合の要素数

要素数とは？

有限集合 A の要素数とは, その集合の要素の数である

- ▶ 記法: $|A|$, $\#A$, $\#(A)$

例:

- ▶ $|\{a, c, t\}| = 3$
- ▶ $|\emptyset| = 0$

注意:

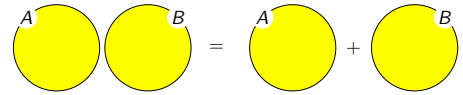
- ▶ 要素数は数なので, 有限集合に対してのみ要素数が定義される
- ▶ 要素数のことを「大きさ」, 「サイズ」と呼ぶことがある
- ▶ $|A|$ は, 「A の絶対値」ではない

集合の要素数：重要な性質

集合の要素数に関する重要な性質

有限集合 A と B に対して, $A \cap B = \emptyset$ が成り立つとき,

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$



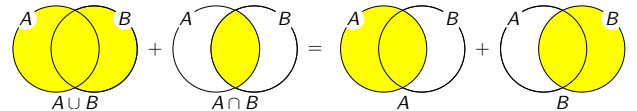
これは, まあ, 当たり前

集合の要素数：重要な性質 (2)

集合の要素数に関する重要な性質：包除原理

有限集合 A と B に対して,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



これも, まあ当たり前だが,
 1つ前のページに書かれた性質から証明できる

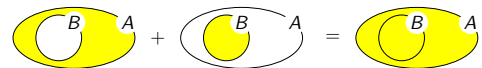
(演習問題)

集合の要素数：重要な性質 (3)

集合の要素数に関する重要な性質

有限集合 A と B に対して, $B \subseteq A$ が成り立つとき,

$$|A - B| = |A| - |B|$$



これも, まあ当たり前だが, 証明は次回

集合の要素数：例題

例題

30 人に対してあるアンケートを行った結果が以下の通りであった.
 なお, アンケートのすべての項目に 30 人全員が回答した.

- ▶ 30 人中, 6 人は愛媛県に行ったことがある
 - ▶ 30 人中, 10 人はディズニーランドに行ったことがある
 - ▶ 30 人中, 19 人は愛媛県にもディズニーランドにも行ったことがない
- このとき, 愛媛県とディズニーランドの両方に行ったことがある人は 30 人中何人か?



[http://en.wikipedia.org/wiki/Matsuyama_Castle_\(Iyo\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Matsuyama_Castle_(Iyo))

http://en.wikipedia.org/wiki/Tokyo_Disneyland

集合を用いて整理

- ▶ A = アンケート回答者全体
- ▶ B = アンケート回答者の中で、愛媛県に行ったことがある人全体
- ▶ C = アンケート回答者の中で、ディズニーランドに行ったことがある人全体

このとき、 $B \subseteq A, C \subseteq A$ であり、つまり、 $B \cup C \subseteq A$ でもあり、

- ▶ $A - (B \cup C)$ = アンケート回答者の中で、愛媛県にもディズニーランドにも行ったことがない人全体
- ▶ $B \cap C$ = アンケート回答者の中で、愛媛県とディズニーランドの両方に行ったことがある人全体

知りたいものは

- ▶ $B \cap C$ の要素数

分かっていること

- ▶ $|A| = 30, |B| = 6, |C| = 10, |A - (B \cup C)| = 19$
- ▶ $B \cup C \subseteq A$

知りたいもの

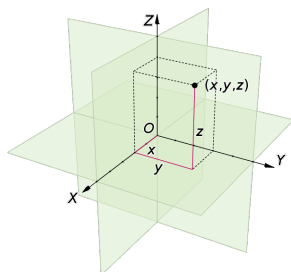
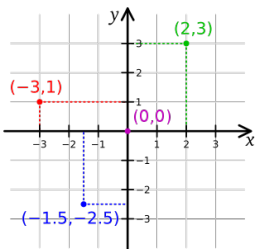
- ▶ $|B \cap C|$

後は計算

- ▶ $B \cup C \subseteq A$ なので、 $|B \cup C| = |A| - |A - (B \cup C)| = 30 - 19 = 11$
 - ▶ 包除原理より、 $|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 6 + 10 - 11 = 5$
- すなわち、愛媛県とディズニーランドの両方に行ったことがある人は 30 人中 5 人である。 □

- ① 集合の包含関係：部分集合
- ② 有限集合の要素数
- ③ 集合の直積
- ④ 冪集合
- ⑤ 集合に対する等式の証明：直積
- ⑥ 今日のまとめ

- ▶ 2次元平面の点の座標は2つの実数を「対」にして表現する
- ▶ このように、集合の要素を「対」にすることは有用



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

プログラムにおける構造体

```
struct account {
    string name;
    int account_number;
    int balance;
};
```

数個のデータを「組」にして、一つの構造を表現する

今から行うこと

数学において「対」や「組」を表現する方法を理解する

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは、ものを2つ並べたものことである。

- ▶ a と a' をこの順で並べたものは「 (a, a') 」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2つの順序対 (a, a') と (b, b') が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し、
 $a = b$ かつ $a' = b'$

であることと定義する

注意： (a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して、

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ばれる

例

$A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$ のとき、

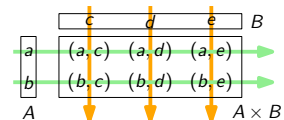
$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

簡単な確認：有限集合 A, B に対して、 $|A \times B| = |A| \times |B|$

例

$A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$ のとき、

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$ のとき、

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？ (常識に基づく定義)

n 個組とは、ものを n 個並べたものことである。

▶ a_1, a_2, \dots, a_n をこの順で並べたものは「 (a_1, a_2, \dots, a_n) 」と表記する

同じ n 個組 (常識に基づく定義)

2つの n 個組 (a_1, a_2, \dots, a_n) と (b_1, b_2, \dots, b_n) が等しいことを $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表記し、

すべての i に対して $a_i = b_i$

であることを定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積を $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ と表記して、

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 」を「 $\prod_{i=1}^n A_i$ 」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}, C = \{f, g\}$ のとき、

$$A \times B \times C = \{(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), (b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\}$$

簡単な確認：有限集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対して、

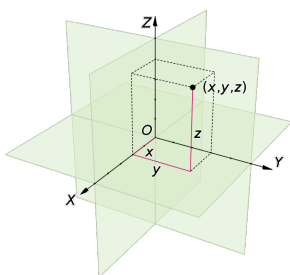
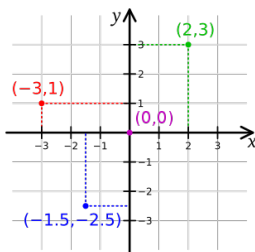
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$$

集合の直積 (関係する記法)

- ▶ $A \times A$ を A^2 と書く
- ▶ $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- ▶ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- ▶ $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- ▶ $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- ▶ ...



集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- ▶ www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- ▶ www.kantei.go.jp: 202.232.86.11

つまり、

- ▶ 可能な IP アドレス全体の集合 = $\{0, \dots, 255\}^4$
- ▶ 可能な IP アドレスの総数 = $|\{0, \dots, 255\}^4| = 256^4 = 4294967296$ (約 43 億)

→ IP アドレス枯渇問題

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- ▶ アデニン (A), チミン (T), シトシン (C), グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

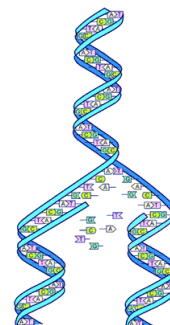
つまり、

- ▶ DNA が持つ遺伝情報全体の集合 = $\{A, T, C, G\}^n$

n は生物種などによって異なる自然数

- ▶ 大腸菌: $n \approx 4.6 \times 10^6$
- ▶ ヒト: $n \approx 3.2 \times 10^9$

<http://en.wikipedia.org/wiki/Genome>



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, 3), (2, 3)\}, \\ B \times C &= \{(3, 4), (3, 5)\}, \\ A \times B \times C &= \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\}, \\ (A \times B) \times C &= \{((1, 3), 4), ((1, 3), 5), ((2, 3), 4), ((2, 3), 5)\}, \\ A \times (B \times C) &= \{(1, (3, 4)), (1, (3, 5)), (2, (3, 4)), (2, (3, 5))\} \end{aligned}$$

特に、 $A \times B \times C$ と $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ はすべて異なる

目次

- ① 集合の包含関係：部分集合
- ② 有限集合の要素数
- ③ 集合の直積
- ④ 幕集合
- ⑤ 集合に対する等式の証明：直積
- ⑥ 今日のまとめ

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり、 2^A と表記する。

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 A に対して、 $|2^A| = 2^{|A|}$

- ▶ 「冪集合」の他に「巾集合」、「べき集合」、「ベキ集合」とも書く
- ▶ 「 2^A 」の他に「 $\mathcal{P}(A)$ 」、「 $\mathcal{D}(A)$ 」とも書く
- ▶ 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

冪集合：例とイメージ

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

イメージ (箱による)



冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり、 2^A と表記する。

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- ▶ $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- ▶ $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- ▶ $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

冪集合の定義より

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

目次

- 1 集合の包含関係：部分集合
- 2 有限集合の要素数
- 3 集合の直積
- 4 冪集合
- 5 集合に対する等式の証明：直積
- 6 今日のまとめ

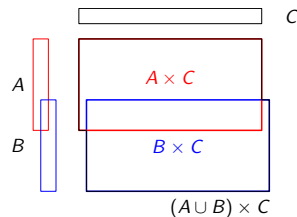
直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

図による直感



直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

格言 (再掲)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

同値変形によって証明する

直積に関する等式：例題 — 証明

証明： $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ を証明すればよい。

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C & \\ \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) & \quad (\text{直積の定義}) \\ \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) & \quad (\text{合併の定義}) \\ \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) & \quad (\text{分配法則}) \\ \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) & \quad (\text{直積の定義}) \\ \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) & \quad (\text{合併の定義}) \end{aligned}$$

□

目次

- 1 集合の包含関係：部分集合
- 2 有限集合の要素数
- 3 集合の直積
- 4 冪集合
- 5 集合に対する等式の証明：直積
- 6 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 論理を用いて、部分集合を定義し、それを理解する
- ▶ 有限集合の要素数が計算できる
- ▶ 集合の直積と冪集合を理解し、正しく答えられる
- ▶ 集合の直積に関する等式を証明できる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK