

離散数学 第4回
証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年5月1日

最終更新 : 2015年4月30日 09:54

今日の概要

今日の目標

- ▶ 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ \exists や \forall を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
 - ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目
- これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

1学期間の概要 (再掲)

主題

- ▶ 理工学のあらゆる分野に現れる**数学の言葉と論理**を徹底的に身につける
- ▶ これによって、論理的な思考を行う基礎能力を体得し、将来的に、専門書を読み解き、自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- ▶ キャッチフレーズは「**語学としての数学**」

達成目標

以下の2項目をすべて達成することを目標とする。

- 1 数学における基本的な用語 (集合, 論理, 写像, 関係) を正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

スケジュール 前半 (予定)

- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月10日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月17日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (4月24日)
- 4 **証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明** (5月1日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月8日)
- 6 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (5月15日)
- 7 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月22日)
- 8 写像 (1) : 像と逆像 (5月29日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月5日)
- 中間試験 (6月12日)

注意 : 予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 10 関係 (1) : 関係 (6月19日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (6月26日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (7月3日)
- 13 関係 (4) : 関係の閉包 (7月10日)
- 14 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月17日)
- 15 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月24日)
- 授業等調整日 (予備日) (7月31日)
- 期末試験 (8月7日?)

注意 : 予定の変更もありうる

述語論理における重要な恒真式 (復習)

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

述語論理における重要な恒真式 (復習)

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式 : できる
- ▶ 述語論理式 : できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式 : できるかもしれない
- ▶ 述語論理式 : できるかもしれない

しかし、とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには、述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (復習)

述語論理における重要な恒真式 (1) : 復習

\forall の否定, \exists の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して、次が成り立つ

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in D (P(x))) &\Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x)) \\ \neg(\exists x \in D (P(x))) &\Leftrightarrow \forall x \in D (\neg P(x))\end{aligned}$$

\forall の分配法則, \exists の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して、次が成り立つ

$$\begin{aligned}(\forall x \in D (P(x))) \wedge (\forall x \in D (Q(x))) &\Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x)) \\ (\exists x \in D (P(x))) \vee (\exists x \in D (Q(x))) &\Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x))\end{aligned}$$

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して、次が成り立つ

$$\begin{aligned}\forall x \in D (\forall y \in D (P(x, y))) &\Leftrightarrow \forall y \in D (\forall x \in D (P(x, y))) \\ \exists x \in D (\exists y \in D (P(x, y))) &\Leftrightarrow \exists y \in D (\exists x \in D (P(x, y)))\end{aligned}$$

述語論理における重要な恒真式 (2) : 復習

∀ の導入, ∃ の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して, 次が成り立つ

$$P \Leftrightarrow \forall x \in D (P)$$

$$P \Leftrightarrow \exists x \in D (P)$$

注: P の中に x は自由変数として現れない

∀ の分配法則, ∃ の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$, 命題 Q に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \vee Q)$$

$$\exists x \in D (P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \wedge Q)$$

注: Q の中に x は自由変数として現れない

述語論理における重要な恒真式 (3) : 復習

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \forall y \in D (P(y))$$

$$\exists x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \exists y \in D (P(y))$$

注: $P(x)$ の中に y は自由変数として現れず,
 $P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

目次

① 述語論理における重要な恒真式 (復習)

② 同値変形による恒真性の証明

③ $\exists x (P(x))$ の証明

④ $\forall x (P(x))$ の証明

⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明

⑥ 今日のまとめ

同値変形による恒真性の証明 : 例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) \quad (\text{実質含意})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) \quad (\forall \text{ の否定})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad (\text{二重否定の除去})$$

□

同値変形による恒真性の証明 : 例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q \quad (\text{実質含意})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q \quad (\forall \text{ の否定})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) \quad (\exists \text{ の導入})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q) \quad (\exists \text{ の分配法則})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) \quad (\text{実質含意})$$

□

目次

① 述語論理における重要な恒真式 (復習)

② 同値変形による恒真性の証明

③ $\exists x (P(x))$ の証明

④ $\forall x (P(x))$ の証明

⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明

⑥ 今日のまとめ

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは?

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章. 読者に伝わるように書く

「 \sim が存在する」という命題の証明法 : 例題 1

例題 1 : 次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

▶ 記号を使って書くと, 集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ に対して

$$\exists x \in A (x \text{ は素数である})$$

▶ A が有限集合なので, 前回のよう, \forall を用いて書き直すことで証明できるが, ここでは (練習のため) 違う方法で証明する

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

素数とは？：素数の定義

自然数 n が素数であるとは、
それが 1 と n 以外の自然数で割り切れないこと

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

- ▶ 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、
3 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える。

- ▶ 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので、
7 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

要求されている性質

- ▶ 自然数である
- ▶ 3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 である

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると、 $17 = 5 \times 3 + 2$ なので、余りは 2 である。
- ▶ 17 を 7 で割ると、 $17 = 2 \times 7 + 3$ なので、余りは 3 である。
- ▶ したがって、3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

疑問点

「17」はどのようにして見つかったのか？

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し、証明として書くものは清書のみ

下書き

- ▶ 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- ▶ 確かに、それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書

- ▶ 前のページのように、まとまった証明を書く

どうしてそうするのか？

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する」ことが正しいのかどうか、ということだけが読者の興味の対象
- ▶ 証明では、それが確認できさえすればよい

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし、 k は非負整数)
 - ▶ これを 7 で割った余りが 3 となればよい
 - ▶ $k = 0$ のとき、 $3k + 2 = 2$ で、7 で割った余りは 2
 - ▶ $k = 1$ のとき、 $3k + 2 = 5$ で、7 で割った余りは 5
 - ▶ $k = 2$ のとき、 $3k + 2 = 8$ で、7 で割った余りは 1
 - ▶ $k = 3$ のとき、 $3k + 2 = 11$ で、7 で割った余りは 4
 - ▶ $k = 4$ のとき、 $3k + 2 = 14$ で、7 で割った余りは 0
 - ▶ $k = 5$ のとき、 $3k + 2 = 17$ で、7 で割った余りは 3
- ということなので、17 を考えればよい

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える。

- ▶ 80 を 3 で割ると、 $80 = 26 \times 3 + 2$ なので、余りは 2 である。
- ▶ 80 を 7 で割ると、 $80 = 11 \times 7 + 3$ なので、余りは 3 である。
- ▶ したがって、3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

x に要求されている性質

- ▶ x は実数である
- ▶ $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす

例題 3：下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- ▶ よって、 $(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい
- ▶ 「 $(x - 2)(x - 3) < 0$ 」は「 $2 < x < 3$ 」と同値
- ▶ なので、2 よりも大きく、3 よりも小さい実数を考えればよい

「～が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

- ▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

- ▶ したがって、 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する。 □

今一度強調

- ▶ 選んだものは書く必要がある (この場合は、 $\frac{5}{2}$)
- ▶ $\frac{5}{2}$ がどのように出てきたのかは書く必要がない

嘉田 勝「証明を理解するための考え方」を参照

(数学セミナー 2009 年 5 月号, <http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/susemi0905/>)

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$.
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1 + x)^3 + (1 - x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、(1+x)³ + (1-x)³ = 6x² + 2 である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ (1+x)³ + (1-x)³ = (1+3x+3x²+x³) + (1-3x+3x²-x³) = 6x² + 2.
- ▶ したがって、(1+x)³ + (1-x)³ = 6x² + 2 である。 □

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 ∃x (P(x)) の証明
- 4 ∀x (P(x)) の証明
- 5 ¬∀x (P(x)) の証明
- 6 今日のまとめ

例題 1：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して、a + b は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

∀ の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

$$\neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x))$$

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b が存在して、a + b は 2 で割り切れない

反例：a + b が 2 で割り切れないような、異なる素数 a, b

例題 1：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して、a + b は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 異なる素数 a = 2, b = 3 を考える。
- ▶ このとき、a + b = 2 + 3 = 5 であり、これは 2 で割り切れない。 □

例題 2：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の実数 x に対して、x² > 0 である

上の命題の否定

ある実数 x に対して、x² > 0 ではない

反例：x² > 0 ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかの見通しは、下書きに書く

例題 2：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の実数 x に対して、x² > 0 である

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 実数 x = 0 を考える。
- ▶ このとき、x² = 0 であり、x² > 0 にはならない。 □

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 ∃x (P(x)) の証明
- 4 ∀x (P(x)) の証明
- 5 ¬∀x (P(x)) の証明
- 6 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 述語論理式と同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ ∃ や ∀ を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 ⇨ 論理的思考の訓練
 - ▶ 証明は文章 (主張) ⇨ 文章構造と論理構造の対応に注目
- これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK