離散数学 第 13 回
関係 (4)：関係の閉包

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 7 月 10 日

最終更新：2015 年 7 月 9 日　10:37

スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 10 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 17 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 24 日)
4. 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 1 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 8 日)
6. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (5 月 15 日)
7. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 22 日)
8. 写像 (1)：像と逆像 (5 月 29 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 5 日)

- 中間試験 (6 月 12 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

10. 関係 (1)：関係 (6 月 19 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (6 月 26 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (7 月 3 日)
13. 関係 (4)：関係の閉包 (7 月 10 日)
14. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 17 日)
15. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 24 日)

- 補講 (7 月 31 日？)
- 期末試験 (8 月 7 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

関係から別の関係を得る操作を理解し，答えられるようになる

- 合併，共通部分
- 逆
- 反射閉包，対称閉包，推移閉包

操作 ＝ 写像

関係の性質 (復習)

A 上の関係 R を

反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

完全性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ または $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

反対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} x$ ならば $x = y$

推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

関係の表現法 (3)：グラフ — 復習

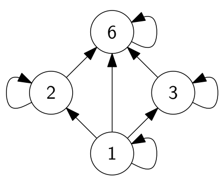
グラフとしての関係の表現

A 上の関係 R を

- 頂点集合を A として，
- $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であるとき，そのときに限り $x \to y$ という矢印を引く

グラフで表現する

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ の上の整除関係



関係の表現法 (2)：直積の部分集合 — 復習

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を直積の部分集合

$$\{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in A \text{ かつ } x \mathrel{\mathrm{R}} y\} \subseteq A^2$$

で表現する

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ の上の整除関係

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$$

今日は，この視点を大事にする

- つまり,「$x \mathrel{\mathrm{R}} y$」のことを「$(x, y) \in \mathrm{R}$」と書いていく

目次

関係の合併

集合 A 上の関係 R, S

関係の合併とは？

R と S の合併とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R} \cup \mathrm{S} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{R} \text{ または } (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$ で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\},\\
\mathrm{S} &= \{(a,b),(a,d),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d)\} \text{ のとき，}\\
\mathrm{R} \cup \mathrm{S} &= \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d)\}
\end{aligned}$$

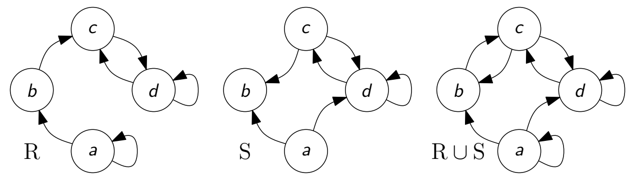
関係の合併：グラフとして描いてみる

集合 A 上の関係 R, S

関係の合併とは？

R と S の合併とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R} \cup \mathrm{S} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{R} \text{ または } (x, y) \in \mathrm{S}\}$$



関係の共通部分

集合 A 上の関係 R, S

関係の共通部分とは？

R と S の共通部分とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R} \cap \mathrm{S} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{R} \text{ かつ } (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$ で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\},\\
\mathrm{S} &= \{(a,b),(a,d),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d)\} \text{ のとき，}\\
\mathrm{R} \cap \mathrm{S} &= \{(a,b),(c,d),(d,c),(d,d)\}
\end{aligned}$$

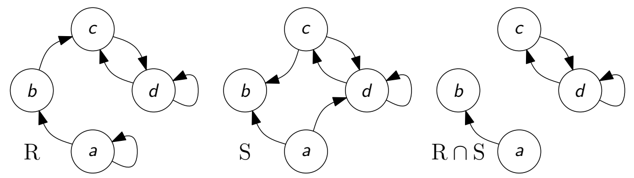
関係の共通部分：グラフとして描いてみる

集合 A 上の関係 R, S

関係の共通部分とは？

R と S の共通部分とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R} \cap \mathrm{S} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{R} \text{ かつ } (x, y) \in \mathrm{S}\}$$



関係の合成

集合 A 上の関係 R, S

関係の合成とは？

R と S の合成とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{S} \circ \mathrm{R} = \{(x, y) \mid \text{ ある } z \in A \text{ が存在して，} (x, z) \in \mathrm{R} \text{ かつ } (z, y) \in \mathrm{S}\}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$ で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\},\\
\mathrm{S} &= \{(a,b),(a,d),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d)\} \text{ のとき，}\\
\mathrm{S} \circ \mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,c),\\
&\quad (c,d),(d,b),(d,c),(d,d)\}
\end{aligned}$$

例えば，$(d, c) \in \mathrm{R}, (c, b) \in \mathrm{S}$ なので，$(d, b) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$

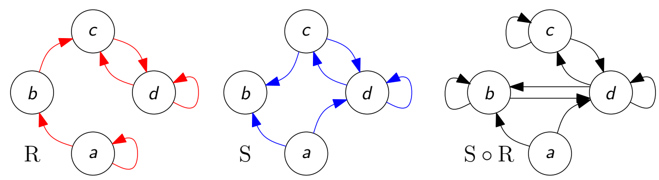
関係の合成：グラフとして描いてみる

集合 A 上の関係 R, S

関係の合成とは？

R と S の合成とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{S} \circ \mathrm{R} = \{(x, y) \mid \text{ ある } z \in A \text{ が存在して，} (x, z) \in \mathrm{R} \text{ かつ } (z, y) \in \mathrm{S}\}$$



記法「$\mathrm{S} \circ \mathrm{R}$」における順番に注意

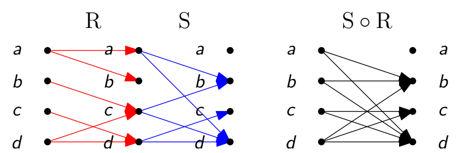
関係の合成：理解する

集合 A 上の関係 R, S

関係の合成とは？

R と S の合成とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{S} \circ \mathrm{R} = \{(x, y) \mid \text{ ある } z \in A \text{ が存在して，} (x, z) \in \mathrm{R} \text{ かつ } (z, y) \in \mathrm{S}\}$$



注：これは，関係を表すグラフではない

関係の逆

集合 A 上の関係 R

関係の逆とは？

R の逆とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathrm{R}\}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$ で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\} \text{ のとき，}\\
\mathrm{R}^{-1} &= \{(a,a),(b,a),(c,b),(d,c),(c,d),(d,d)\}
\end{aligned}$$

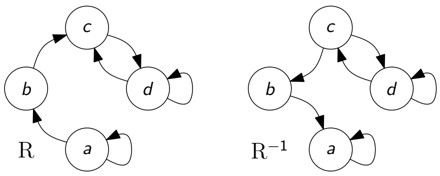
関係の逆

集合 A 上の関係 R

関係の逆とは？

R の逆とは，次で定義される A 上の関係

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathrm{R}\}$$



目次

関係を全部集めた集合

有限集合 $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

問題

A 上の関係は全部でいくつあるか？

答え：$2^{(n^2)}$

- A 上の関係とは，直積 $A \times A$ の部分集合
- $A \times A$ の部分集合の総数は $2^{|A \times A|}$
- $|A \times A| = |A|^2 = n^2$ □

関係を全部集めた集合の記法

A 上の関係をすべて集めた集合を $2^{(A^2)}$ で表す

注：$2^{(A^2)} = A^2$ の冪集合

関係の上の半順序

(有限であるとは限らない) 集合 A に対して，

半順序集合 $\left(2^{(A^2)}, \subseteq\right)$ を考える

つまり，

A 上の二項関係 R, S に対して，$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}$ であるとは，

- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$(x, y) \in \mathrm{R} \quad ならば \quad (x, y) \in \mathrm{S}$$

言い換えると，

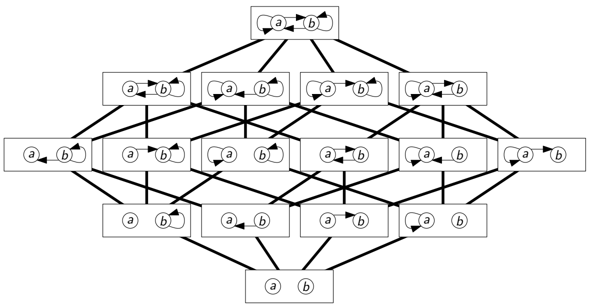
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$x \mathrel{\mathrm{R}} y \quad ならば \quad x \mathrel{\mathrm{S}} y$$

「$\subseteq$」が半順序であることは確認済

関係の上の半順序：例

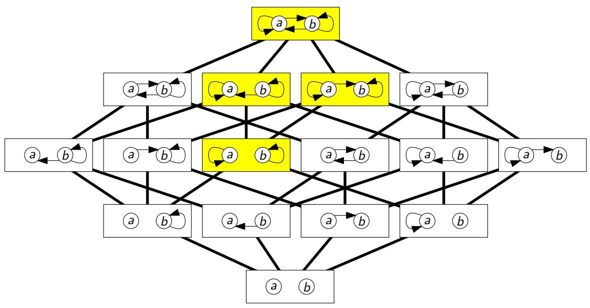
$A = \{a, b\}$ のとき，ハッセ図を描いてみた



反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性を持つものは
いくつあるか？

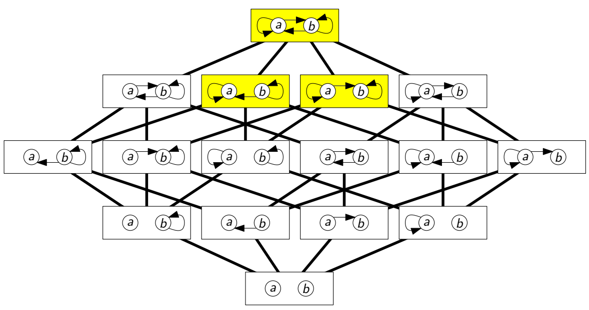
関係の上の半順序：反射性

反射性を持つものは 4 個



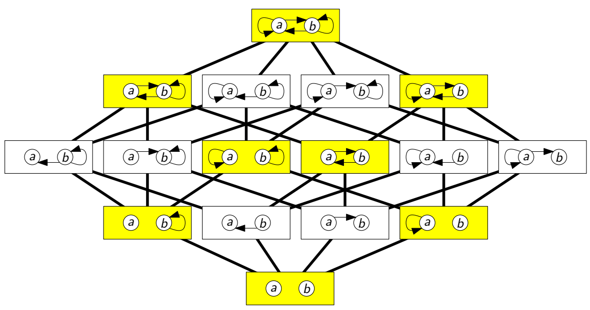
関係の上の半順序：完全性

完全性を持つものは 3 個



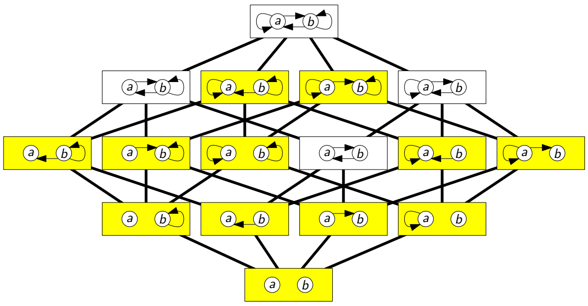
関係の上の半順序：対称性

対称性を持つものは 8 個



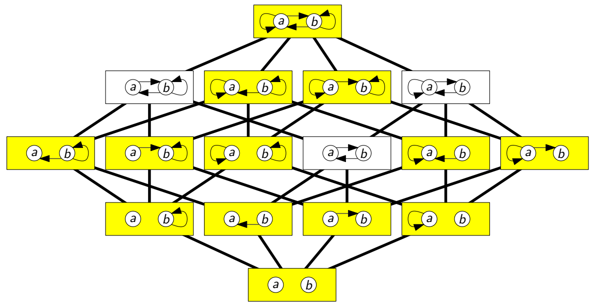
関係の上の半順序：反対称性

反対称性を持つものは 12 個



関係の上の半順序：推移性

推移性を持つものは 13 個



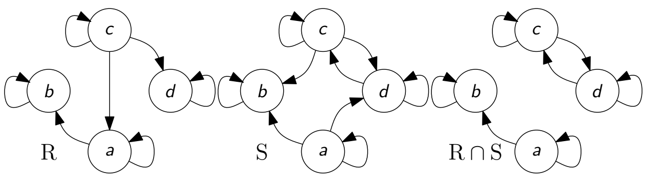
関係に対する操作と関係の性質

集合 A 上の関係 R, S

関係の共通部分と反射性

R と S が反射性を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も反射性を持つ

例



関係に対する操作と関係の性質：証明

集合 A 上の関係 R, S

関係の共通部分と反射性

R と S が反射性を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も反射性を持つ

証明：R と S が反射性を持つと仮定する

- 任意の $x \in A$ を考える
- R が反射性を持つので，$(x, x) \in \mathrm{R}$ となる
- S も反射性を持つので，$(x, x) \in \mathrm{S}$ となる
- したがって，関係の共通部分の定義より，$(x, x) \in \mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ となる
- したがって，$\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ は反射性を持つ □

注：$x \,\mathrm{R}\, y$ を $(x, y) \in \mathrm{R}$ と書いている

関係に対する操作と関係の性質：続

集合 A 上の関係 R, S

関係の共通部分と対称性 (演習問題)

R と S が対称性を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も対称性を持つ

関係の共通部分と推移性 (演習問題)

R と S が推移性を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も推移性を持つ

関係の合併と完全性 (演習問題)

R と S が完全性を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{R} \cup \mathrm{S}$ も完全性を持つ

目次

関係の閉包：まずは定義から

集合 A 上の関係 R

反射閉包 (reflex closure) とは？

R の反射閉包とは，R を含む反射性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　$r(\mathrm{R})$ と表記する

対称閉包 (symmetric closure) とは？

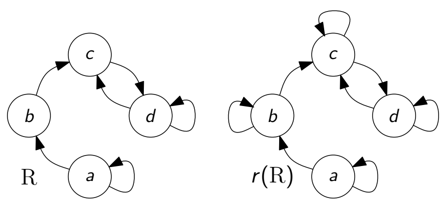
R の対称閉包とは，R を含む対称性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　$s(\mathrm{R})$ と表記する

推移閉包 (transitive closure) とは？

R の推移閉包とは，R を含む推移性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　$t(\mathrm{R})$ と表記する

反射閉包：直感

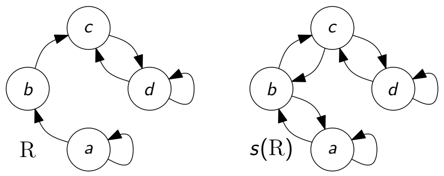
反射性を持つようになるまで，必要な矢印だけを追加する



その結果として得られるものが反射閉包

対称閉包：直感

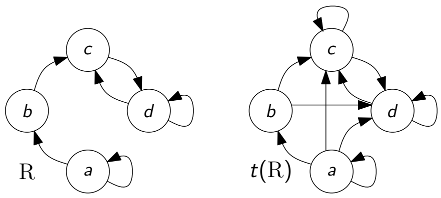
対称性を持つようになるまで，必要な矢印だけを追加する



その結果として得られるものが対称閉包

推移閉包：直感

推移性を持つようになるまで，必要な矢印だけを追加する



その結果として得られるものが推移閉包

関係の閉包：まずは定義から (再掲)

集合 A 上の関係 R

反射閉包 (reflex closure) とは？

R の反射閉包とは，R を含む反射性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　　$r(\mathrm{R})$ と表記する

対称閉包 (symmetric closure) とは？

R の対称閉包とは，R を含む対称性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　　$s(\mathrm{R})$ と表記する

推移閉包 (transitive closure) とは？

R の推移閉包とは，R を含む推移性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの　　$t(\mathrm{R})$ と表記する

疑問：そもそも反射閉包，対称閉包，推移閉包は必ず存在するのか？

反射閉包の存在性

集合 A 上の関係 R

次のような関係の集合を考える

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \{\mathrm{S} \mid \mathrm{S} \text{ は反射性を持つ } A \text{ 上の関係}, \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}\}$$

このとき，$(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ は半順序集合

証明したいこと

$(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ において，$\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が存在する

この最小元 $\min \mathcal{F}(\mathrm{R})$ が R の反射閉包

前回の講義を思い出す

半順序集合において，最小元が存在するとは限らない

反射閉包の存在性：補題 A

証明したいこと

$(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ において，$\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が存在する

まず，確認すること

補題 A

$\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$

補題 A の証明：関係 A^2 を考える

- 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in A^2$ である
- したがって，A^2 は反射性を持つ .... (1)
- また，$\mathrm{R} \subseteq A^2$ である .... (2)
- (1), (2) より，$A^2 \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$
- すなわち，$\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$ □

注：補題とは，定理を証明する際に用いる補助的な定理 (補助定理)

反射閉包の存在性：補題 B

証明したいこと

$(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ において，$\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が存在する

次のような関係を考える

$$\check{\mathrm{R}} = \{(x, y) \mid \text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，} \quad (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

補題 A ($\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$) より，$\check{\mathrm{R}}$ は確かに定義される

補題 B

$\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$

補題 B の証明：次の 2 つを証明すればよい

(i) $\check{\mathrm{R}}$ は反射性を持つ
(ii) $\mathrm{R} \subseteq \check{\mathrm{R}}$

この 2 つが証明できれば，$\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ となる

反射閉包の存在性：補題 B (i)

補題 B の証明 (i)

$\check{\mathrm{R}}$ は反射性を持つ

(i) の証明： 任意の $x \in A$ を考える

- 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ を考える
- $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の定義より，S は反射性を持つ
- したがって，$(x, x) \in \mathrm{S}$
- したがって，$(x, x) \in \check{\mathrm{R}}$ となる
- したがって，$\check{\mathrm{R}}$ は反射性を持つ □

反射閉包の存在性：補題 B (ii)

補題 B の証明 (ii)

$\mathrm{R} \subseteq \check{\mathrm{R}}$

(ii) の証明：任意の $(x, y) \in \mathrm{R}$ を考える

- 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ を考える
- $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の定義より，$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}$
- $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}$ と $(x, y) \in \mathrm{R}$ より，$(x, y) \in \mathrm{S}$
- すなわち，$(x, y) \in \check{\mathrm{R}}$
- したがって，$\mathrm{R} \subseteq \check{\mathrm{R}}$

これで補題 B の証明が完了した □

反射閉包の存在性：補題 C

証明したいこと

$(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ において，$\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が存在する

定義の確認：$\check{\mathrm{R}}$ が $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元であるとは次の 2 つを満たすこと

- $\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ (補題 B)
- 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$ (補題 C)

補題 C

任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$

つまり，補題 B と補題 C から
$\check{\mathrm{R}}$ は半順序集合 $(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ における $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元である

反射閉包の存在性：補題 C

補題 C

任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$

補題 C の証明：任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ を考える

- 任意の $(x, y) \in \check{\mathrm{R}}$ を考える
- $\check{\mathrm{R}}$ の定義から，$(x, y) \in \mathrm{S}$
- したがって，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$ $\square$

関係の閉包：まずは定義から (再々掲)

集合 A 上の関係 R

反射閉包 (reflex closure) とは？

R の反射閉包とは，R を含む反射性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの $r(\mathrm{R})$ と表記する

対称閉包 (symmetric closure) とは？

R の対称閉包とは，R を含む対称性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの $s(\mathrm{R})$ と表記する

推移閉包 (transitive closure) とは？

R の推移閉包とは，R を含む推移性を持つ関係の中で，
$\subseteq$ に関して最小であるもの $t(\mathrm{R})$ と表記する

同様に，対称閉包と推移閉包が必ず存在することも証明できる
(演習問題)

同じように証明すると：対称閉包について

- 集合 A 上の関係 R に対して，次のような関係の集合を考える

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \{\mathrm{S} \mid \mathrm{S} \text{ は対称性を持つ } A \text{ 上の関係}, \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}\}$$

- そして，次のような関係を考える

$$\check{\mathrm{R}} = \{(x, y) \mid \text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，} (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

- このとき，
半順序集合 $(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ における $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が $\check{\mathrm{R}}$ となる
- この $\check{\mathrm{R}}$ が R の対称閉包 $s(\mathrm{R})$ である

同じように証明すると：推移閉包について

- 集合 A 上の関係 R に対して，次のような関係の集合を考える

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \{\mathrm{S} \mid \mathrm{S} \text{ は推移性を持つ } A \text{ 上の関係}, \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}\}$$

- そして，次のような関係を考える

$$\check{\mathrm{R}} = \{(x, y) \mid \text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，} (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

- このとき，
半順序集合 $(\mathcal{F}(\mathrm{R}), \subseteq)$ における $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ の最小元が $\check{\mathrm{R}}$ となる
- この $\check{\mathrm{R}}$ が R の推移閉包 $t(\mathrm{R})$ である

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

関係から別の関係を得る操作を理解し，答えられるようになる

- 合併，共通部分
- 逆
- 反射閉包，対称閉包，推移閉包

操作 ＝ 写像

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK