

離散数学 第5回
証明法 (2) : 含意を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年5月8日

最終更新 : 2015年5月7日 15:45

スケジュール 後半 (予定)

- 10 関係 (1) : 関係 (6月19日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (6月26日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (7月3日)
- 13 関係 (4) : 関係の閉包 (7月10日)
- 14 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月17日)
- 15 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月24日)
 - 授業等調整日 (予備日) (7月31日)
 - 期末試験 (8月7日?)

注意 : 予定の変更もありうる

目次

- 1 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の証明
- 2 より複雑な命題の証明
- 3 対偶による証明と背理法
- 4 今日のまとめ

証明法 (復習)

格言

- ▶ 証明の基本は「定義に立ち戻る」こと
- ▶ 証明では「下書き」と「清書」を区別し、証明として書くものは清書のみ

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを1つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

「任意の \sim に対して \dots である」という命題の証明法

- 1 「任意の \sim を考える」で始め、「したがって、 \dots である」で終わる
- 2 それが「 \dots である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

スケジュール 前半 (予定)

- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月10日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月17日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (4月24日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (5月1日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月8日)
- 6 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (5月15日)
- 7 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月22日)
- 8 写像 (1) : 像と逆像 (5月29日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月5日)
 - 中間試験 (6月12日)

注意 : 予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標

- ▶ 含意 (\rightarrow) を含む命題の証明が書けるようになる
- ▶ $\exists, \forall, \rightarrow$ が組み合わされた命題の証明が書けるようになる
- ▶ 対偶による証明と背理法を理解し、使えるようになる

なぜ証明を勉強するのか? (再掲)

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
- ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

前回行ったこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは?

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝えるように書く

「 \sim ならば \dots である」という命題の証明法 : 例題 1

例題 1 : 次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ

文の論理構造 : $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 3) \rightarrow (x^2 > 9))$

「 \sim ならば \dots である」という命題の証明法

- 1 「 \sim であると仮定する」で始め、「したがって、 \dots である」で終わる
- 2 「 \sim である」という性質を用いて、「 \dots である」を証明する

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ x が $x > 3$ を満たすと仮定する。
- ▶ 実数 x が $x > 3$ を満たすので、両辺を 2 乗すると、 $x^2 > 9$ が得られる
- ▶ したがって、 $x^2 > 9$ である。
- ▶ したがって、 $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ。 □

「～ならば…である」という命題の証明法

- 1 「～であると仮定する」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて、「…である」を証明する

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ x が $x > 3$ を満たすと仮定する。
- ▶ 実数 x が $x > 3$ を満たすので、両辺を 2 乗すると、 $x^2 > 9$ が得られる
- ▶ したがって、 $x^2 > 9$ が成り立つ。
- ▶ したがって、 $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ。 □

整理

- ▶ 証明すること：「 $x^2 > 9$ 」
- ▶ 用いる性質：「 x は実数である」、「 $x > 3$ である」

格言

証明では「証明すること」と「用いる性質」を明確に区別する

次のように短く証明を書いてもよい

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ

証明：実数 x が $x > 3$ を満たすと仮定する。

- ▶ 両辺を 2 乗すると、 $x^2 > 9$ が得られる
- ▶ したがって、 $x > 3$ を満たすとき、 $x^2 > 9$ が成り立つ。 □

変更点

「任意の実数 x を考える」と「 $x > 3$ を満たすと仮定する」を 1 つの文に押し込んで「実数 x が $x > 3$ を満たすと仮定する」と書いた

まどろっこしさが少し消えて、読みやすくなる

例題 2：次の命題を証明せよ

実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき、 $x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ

証明：実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすと仮定する。

- ▶ $x^2 - 3x + 2 = 0$ なので、 $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 = 0$ となる。
- ▶ x は実数なので、 $x-1=0$ または $x-2=0$ となる。
- ▶ したがって、 $x=1$ または $x=2$ となる。 □

整理

- ▶ 証明すること：「 $x=1$ または $x=2$ 」
- ▶ 用いる性質：「 x は実数である」、「 $x^2 - 3x + 2 = 0$ である」

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき、 $x > 3$ が成り立つ

「～ならば…である」という命題が正しいか、正しくないか

正しい場合

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合

- ▶ 「～」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

正しくない場合の証明を正当化する論理 (参照：演習問題 4.1)

$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき、 $x > 3$ が成り立つ

解答：これは正しくない。理由は以下の通りである。

- ▶ 実数 $x = -4$ を考える。
- ▶ このとき、 $x^2 = 16 > 9$ であるが、 $x > 3$ ではない。 □

「～ならば…である」という命題が正しいか、正しくないか

正しい場合

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合

- ▶ 「～」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して、次の 2 つが同値であることを証明せよ

- (1) $xy = 1$ である。
- (2) 0 ではないある実数 t が存在して、 $x = t$ かつ $y = 1/t$ である。

「～と…が同値である」ことの証明法

- 1 「～ならば…である」ことを証明する
- 2 「…ならば～である」ことを証明する

証明法を正当化する論理 (実質同値 (参照：演習問題 2.3.2))

$$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して、次の 2 つが同値であることを証明せよ

- (1) $xy = 1$ である。
- (2) 0 ではないある実数 t が存在して、 $x = t$ かつ $y = 1/t$ である。

証明：まず、(1) ならば (2) であることを証明する。

- ▶ $xy = 1$ であると仮定する。
- ▶ このとき、 $x \neq 0$ である。
- ▶ 実数 t を $t = x$ とする。
- ▶ このとき、 $y = 1/x = 1/t$ となる。
- ▶ したがって、0 でないある実数 t が存在して、 $x = t$ かつ $y = 1/t$ となる。

例題 4

実数 x と y に対して、次の 2 つが同値であることを証明せよ

- (1) $xy = 1$ である.
- (2) 0 ではないある実数 t が存在して、 $x = t$ かつ $y = 1/t$ である.

証明 (続): 次に、(2) ならば (1) であることを証明する.

- ▶ 0 ではないある実数 t が存在して、 $x = t$ かつ $y = 1/t$ であることを仮定する.
- ▶ このとき、 $xy = t \cdot (1/t) = 1$ となる.
- ▶ したがって、 $xy = 1$ である. □

より複雑な命題の証明: 例題 1

例題 1: 次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言

「∀」「∃」が連なるときは、ゲームだと思つと分かりやすい

- ▶ ∀: 相手の手番 (任意の〜に対して)
- ▶ ∃: 自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 1 に挙げた命題の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも、自分がある実数 y を選んで、自分は $x + y = 0$ にできる

より複雑な命題の証明: 例題 1

例題 1: 次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

証明: 任意の x を考える.

- ▶ (ここに「ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる」ことの証明を書く)
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる. □

「〜が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

より複雑な命題の証明: 例題 2

例題 2: 次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「∀」「∃」が連なるときは、ゲームだと思つと分かりやすい

- ▶ ∀: 相手の手番 (任意の〜に対して)
- ▶ ∃: 自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 2 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば、相手がどんな実数 y を選んでも、自分は $xy = 0$ にできる

- ① $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の証明
- ② より複雑な命題の証明
- ③ 対偶による証明と背理法
- ④ 今日のまとめ

より複雑な命題の証明: 例題 1

例題 1: 次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の〜を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

より複雑な命題の証明: 例題 1

例題 1: 次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

証明: 任意の x を考える.

- ▶ このとき、 $y = -x$ を考える. そうすると、 $x + y = x + (-x) = 0$.
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる. □

より複雑な命題の証明: 例題 2

例題 2: 次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

証明: 実数 $x = 0$ を考える.

- ▶ (ここに、「任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる」ことの証明を書く)
- ▶ □

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

証明：実数 $x = 0$ を考える。

- ▶ 任意の実数 y を考える。
- ▶ このとき、 $x = 0$ なので、 $xy = 0$ となる。
- ▶ したがって、 $xy = 0$ となる。 □

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = 0$ となる

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ とならない

$$\neg \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in \mathbb{R} (x + y = 0)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (\exists y \in \mathbb{R} (x + y \neq 0))$$

例題 3 に挙げた命題の否定の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも、自分がある実数 y を選べば、自分は $x + y = 0$ とならないようにできる ($x + y \neq 0$ にできる)

① $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の証明

② より複雑な命題の証明

③ 対偶による証明と背理法

④ 今日のまとめ

任意の命題変数 P, Q に対して、次が成り立つ

対偶法則 (復習)

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

対偶による証明

「 $P \rightarrow Q$ 」を証明する代わりに「 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 」を証明する

用語

「 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 」は「 $P \rightarrow Q$ 」の対偶

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「 \forall 」「 \exists 」が連なるときは、ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ \forall ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ \exists ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 3 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば、相手がどんな実数 y を選んでも、自分は $x + y = 0$ にできる

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = 0$ となる

解答：正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 任意の実数 x を考える。
- ▶ このとき、実数 $y = x^2 + x + 2$ を考える。
- ▶ そうすると、
 $x + y = x + (x^2 + x + 2) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ 。
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ とはならない。 □

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ とならない

同値変形の用途

$P \Leftrightarrow Q$ であるとき、
 P を証明する代わりに、 Q を証明すればよい

このような同値変形の使い方を既にしてきている

- ▶ $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- ▶ $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

ここでは、他の例を 2 つ挙げる (どちらも重要)

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える。
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
 $a \leq b$ が成り立つ

対偶による証明

「 $P \rightarrow Q$ 」を証明する代わりに「 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 」を証明する

対偶による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える。
 任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
 $a \leq b$ が成り立つ

証明：対偶による証明を行う (←これを書くとなかりやすい)
 ▶ すなわち、証明することは「 $a > b$ ならば、ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる」ことである。 (←これを書くとなかりやすい)
 ▶ $a > b$ であると仮定する。
 ▶ $\epsilon = \frac{a-b}{2}$ とおく。
 ▶ $a > b$ より、 $\epsilon > 0$ である。
 ▶ また、 $b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$ 。
 ▶ したがって、ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる。 □

矛盾の導出

任意の命題変数 P に対して、次が成り立つ

矛盾法則

$$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$$

つまり、
 ▶ P が使える性質
 ▶ $\neg P$ が使える性質
 であるとき、**矛盾**を導ける

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b が $a^2 + b = 13$ と $b \neq 4$ を満たすならば、 $a \neq 3$ である。

証明：背理法による証明を行う。 (←これを書くとなかりやすい)
 ▶ 実数 a, b が $a^2 + b = 13, b \neq 4$ と $a = 3$ を満たすと仮定する。
 ▶ このとき、 $a^2 + b = 13$ と $a = 3$ より、

$$b = 13 - a^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4.$$

 ▶ したがって、 $b = 4$ である。
 ▶ これは $b \neq 4$ であることに矛盾する。 □

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 含意 (\rightarrow) を含む命題の証明が書けるようになる
- ▶ $\exists, \forall, \rightarrow$ が組み合わされた命題の証明が書けるようになる
- ▶ 対偶による証明と背理法を理解し、使えるようになる

なぜ証明を勉強するのか？ (再掲)

▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
 ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目
 これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

証明法 (2)：背理法

次は恒真式

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \rightarrow F)$$

背理法による証明

「 $P \rightarrow Q$ 」を証明する代わりに「 $(P \wedge \neg Q) \rightarrow F$ 」を証明する

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b が $a^2 + b = 13$ と $b \neq 4$ を満たすならば、 $a \neq 3$ である。

背理法による証明

「 $P \rightarrow Q$ 」を証明する代わりに「 $(P \wedge \neg Q) \rightarrow F$ 」を証明する

目次

- 1 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の証明
- 2 より複雑な命題の証明
- 3 対偶による証明と背理法
- 4 今日のまとめ

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK