離散数学 **2015 年 8 月 7 日**
期末試験 岡本 吉央

13:00–14:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(中間試験のものと異なっていてもよいが，覚えておくように．) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ に対して，写像 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 4, f(2) = 6, f(3) = 6$ で定義する．このとき，次の集合は何になるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $f(\{1, 2\})$.
2. $f^{-1}(\{7\})$.
3. $f^{-1}(\{4, 5\})$.

問題 2 写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(n) = 2^n$ であるとして定義する．ただし，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は 0 以上の整数全体の集合であるとする．以下の 2 つの問いに答えよ．

1. f が全射であるか，理由も付けて答えよ．
2. f が単射であるか，理由も付けて答えよ．

問題 3 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の同値関係 $\equiv_2$ を次のように定義する．ただし，任意の $m, n \in A$ に対して $m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod p$ であることとする．このとき，商集合 $A \,/\, \equiv_2$ がどのような集合であるか，記述せよ．また，商集合の要素数 $|A \,/\, \equiv_2|$ が何であるかも答えよ．

問題 4 半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$ を考える．b_1 と b_2 が B の最大元であるならば，$b_1 = b_2$ となることを証明せよ．

問題 5 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 上の関係 R, S を次のように定義する．

$$\mathrm{R} = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d)\}, \qquad \mathrm{S} = \{(a, a), (b, c), (c, a), (d, e), (e, b)\}.$$

以下の関係がそれぞれ何であるか，直積 A^2 の部分集合として，その要素を並べること (外延的定義) により答えよ．そして，その関係を表現するグラフを描け．

1. $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}$.
2. $\mathrm{R} \cup \mathrm{R}^{-1}$.
3. R の推移閉包 $t(\mathrm{R})$.

問題 6 次の 2 つの問いに答えよ．

1. 任意の正の整数 n に対して，$6\sqrt{5^n} < 5^{n+1}$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：両辺を 2 乗した式を考えた方が分かりやすいかもしれない．注意：左辺は $6\sqrt{5^n}$ であり $6\sqrt{5}^n$ ではない．)
2. 任意の正の整数 n に対して，正の実数 a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} + 6\sqrt{a_{n-2}} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して，$a_n < 5^n$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：小問 1 を用いよ．)

以上