

提出締切：2015年7月31日

復習問題 15.1 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，関数 $f: A \rightarrow A$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 1$ で定義する。

1. $f^2(1), f^2(2), f^2(3), f^2(4)$ を定めよ。
2. $f^3(1), f^3(2), f^3(3), f^3(4)$ を定めよ。

復習問題 15.2 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 R を

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

と定義する。以下の関係がそれぞれ何であるか，その関係を表現するグラフを描け。

1. \mathbb{R}^2 .
2. \mathbb{R}^3 .
3. \mathbb{R}^4 .

復習問題 15.3 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n - 1} x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 15.4 任意の集合 Σ を考える。文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する。

- $\ell(\epsilon) = 0$. (ただし， ϵ は空文字列を表す.)
- $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば， $\ell(xs) = 1 + \ell(s)$.

ここで， $\Sigma = \{a, b\}$ のとき，以下の文字列の長さはそれぞれ何か？

1. ϵ .
2. a .
3. b .
4. aa .
5. abb .
6. $baabaabb$.

復習問題 15.5 任意の集合 Σ を考える。集合 Σ 上の任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と任意の文字 $x \in \Sigma$ に対して

$$sx \in \Sigma^*$$

となることを証明せよ

復習問題 15.6 任意の集合 Σ を考える。関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ を次のように再帰的に定義する。

- $f(\epsilon) = \epsilon$.
- $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば， $f(xs) = xx f(s)$.

以下の問いに答えよ。

1. $f(abbaa)$ は何であるか？
2. 関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ がうまく定義できていること，すなわち，任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ となることを証明せよ。

追加問題 15.7 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 R で， $R \subseteq \mathbb{R}^2$ が成り立つものはいくつあるか？

追加問題 15.8 集合 $\Sigma = \{a, b, c\}$ を考え，関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ を次のように定義する。

- $f(\epsilon) = \epsilon$.
- $s \in \Sigma^*$ ならば， $f(as) = f(s)$, $f(bs) = bf(s)$, $f(cs) = cf(s)$.

以下の問いに答えよ。

1. 次の文字列 s に対して $f(s)$ は何になるか？ 定めよ。
 - (a) $s = \epsilon$.
 - (b) $s = a$.
 - (c) $s = b$.
 - (d) $s = c$.
 - (e) $s = bac$.
 - (f) $s = cabaabab$.
2. 関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ がうまく定義できていること，すなわち，任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ となることを証明せよ。

追加問題 (発展) 15.9 集合 $\Sigma = \{a, b\}$ を考え, その文字列の集合 $P \subseteq \Sigma^*$ を次のように再帰的に定義する.

- $\epsilon \in P$ である.
- $s \in P$ ならば, $asb \in P$ である.
- $s \in P$ かつ $t \in P$ ならば, $st \in P$ である.
- 上のようにして生成される文字列のみが P の要素である.

以下の問いに答えよ.

1. 次に挙げる各文字列が P の要素であるかないか, 答えよ.

- (a) ϵ .
- (b) ab .
- (c) ba .
- (d) $abab$.
- (e) $aabb$.
- (f) $aabaab$.
- (g) $abbaab$.
- (h) $aaabbb$.

2. 次のような関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ を再帰的に定義する. (ただし, $\Sigma = \{a, b\}$.)

- $f(\epsilon) = 0, g(\epsilon) = 0$.
- 任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して

$$f(xs) = \begin{cases} 1 + f(s) & (x = a \text{ のとき}) \\ f(s) & (x = b \text{ のとき}). \end{cases}$$

$$g(xs) = \begin{cases} g(s) & (x = a \text{ のとき}) \\ 1 + g(s) & (x = b \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, 任意の $s \in P$ に対して, $f(s) = g(s)$ が成り立つことを証明せよ.