離散数学 (13) **2015 年 7 月 10 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2015 年 7 月 17 日

今回の演習問題において，関係 R の反射閉包を $r(\mathrm{R})$，対称閉包を $s(\mathrm{R})$，推移閉包を $t(\mathrm{R})$ で表すこととする．

復習問題 13.1 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 R, S を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathrm{R} &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\},\\ \mathrm{S} &= \{(a,b),(a,d),(c,b),(c,d),(d,c),(d,d)\}.\end{aligned}$$

以下の関係がそれぞれ何であるか，直積 A^2 の部分集合として，その要素を並べること (外延的定義) により答えよ．そして，その関係を表現するグラフを描け．

1. $\mathrm{R} \cup \mathrm{S}$. 2. $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$. 3. $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}$. 4. R^{-1}.

復習問題 13.2 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R, S を考える．このとき，R と S が反射性を持つならば，$\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も反射性を持つことを証明せよ．

復習問題 13.3 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 R を

$$\mathrm{R} = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$$

と定義する．以下の関係がそれぞれ何であるか，直積 A^2 の部分集合として，その要素を並べること (外延的定義) により答えよ．そして，その関係を表現するグラフを描け．

1. $r(\mathrm{R})$. 2. $s(\mathrm{R})$. 3. $t(\mathrm{R})$.

復習問題 13.4 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．以下の問いに答えよ．

(A) A 上の関係の集合 $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \left\{ \mathrm{S} \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathrm{S}\text{ は反射性を持つ } A \text{ 上の}\\ \text{関係，}\ \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}\end{array} \right\}.$$

このとき，$\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$ であることを証明せよ．

(B) 次のような A 上の関係を考える．

$$\check{\mathrm{R}} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，}\\ (x,y) \in \mathrm{S}\end{array} \right\}.$$

問 (A) より，この $\check{\mathrm{R}}$ は確かに定義される．ここで，$\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ であることを証明せよ．

(C) 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$ であることを証明せよ．

(D) 以上を踏まえて，$r(\mathrm{R}) = \check{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．

補足問題 13.5 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R, S を考える．

1. R と S が対称性を持つならば，$\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も対称性を持つことを証明せよ．
2. R と S が推移性を持つならば，$\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$ も推移性を持つことを証明せよ．
3. R と S が完全性を持つならば，$\mathrm{R} \cup \mathrm{S}$ も完全性を持つことを証明せよ．

補足問題 13.6 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．以下の問いに答えよ．

(A) A 上の関係の集合 $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \left\{ \mathrm{S} \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathrm{S}\text{ は対称性を持つ } A \text{ 上の}\\ \text{関係，}\ \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}\end{array} \right\}.$$

このとき，$\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$ であることを証明せよ．

(B) 次のような A 上の関係を考える．

$$\check{\mathrm{R}} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，}\\ (x,y) \in \mathrm{S}\end{array} \right\}.$$

問 (A) より，この $\check{\mathrm{R}}$ は確かに定義される．ここで，$\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ であることを証明せよ．

(C) 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$ であることを証明せよ．

(D) 以上を踏まえて，$s(\mathrm{R}) = \check{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．

補足問題 13.7 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．以下の問いに答えよ．

(A) A 上の関係の集合 $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \left\{ \mathrm{S} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{S} \text{ は推移性を持つ } A \text{ 上の} \\ \text{関係，} \quad \mathrm{R} \subseteq \mathrm{S} \end{array} \right\}.$$

このとき，$\mathcal{F}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$ であることを証明せよ．

(B) 次のような A 上の関係を考える．

$$\check{\mathrm{R}} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R}) \text{ に対して，} \\ (x, y) \in \mathrm{S} \end{array} \right\}.$$

問 (A) より，この $\check{\mathrm{R}}$ は確かに定義される．ここで，$\check{\mathrm{R}} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ であることを証明せよ．

(C) 任意の $\mathrm{S} \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$ に対して，$\check{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{S}$ であることを証明せよ．

(D) 以上を踏まえて，$t(\mathrm{R}) = \check{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．

追加問題 13.8 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 上の関係 R, S を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, e)\}, \\ \mathrm{S} &= \{(a, a), (b, c), (c, a), (d, e), (e, b)\}. \end{aligned}$$

以下の関係がそれぞれ何であるか，直積 A^2 の部分集合として，その要素を並べること (外延的定義) により答えよ．そして，その関係を表現するグラフを描け．

1. $\mathrm{R} \cup \mathrm{S}$.
2. $\mathrm{R} \cap \mathrm{S}$.
3. $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}$.
4. R^{-1}.
5. $\mathrm{R} \cup \mathrm{R}^{-1}$.
6. $r(\mathrm{R})$.
7. $s(\mathrm{R})$.
8. $t(\mathrm{R})$.
9. $r(t(\mathrm{R}))$.
10. $t(r(\mathrm{R}))$.
11. $t(s(\mathrm{R}))$.
12. $s(\mathrm{R}) \cap s(\mathrm{S})$.
13. $t(\mathrm{R}) \cup t(\mathrm{S})$.

追加問題 13.9 任意の集合 A と A 上の任意の関係 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ を考える．このとき，$\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{R}_2$ であると仮定する．

1. $r(\mathrm{R}_1) \subseteq r(\mathrm{R}_2)$ となることを証明せよ．（ヒント：演習問題 13.4 の結果を利用してよい．）
2. $s(\mathrm{R}_1) \subseteq s(\mathrm{R}_2)$ となることを証明せよ．（ヒント：演習問題 13.6 の結果を利用してよい．）
3. $t(\mathrm{R}_1) \subseteq t(\mathrm{R}_2)$ となることを証明せよ．（ヒント：演習問題 13.7 の結果を利用してよい．）

追加問題 13.10 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．このとき，$r(\mathrm{R}) = \mathrm{R} \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 13.11 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．このとき，$s(\mathrm{R}) = \mathrm{R} \cup \mathrm{R}^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 13.12 任意の集合 A と A 上の任意の関係 R を考える．このとき，$r(t(\mathrm{R})) = t(r(\mathrm{R}))$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：他の演習問題の結果を利用してよい．）
補足：$r(t(\mathrm{R}))$ のことを，R の反射推移閉包と呼ぶことがある．