

提出締切：2015年7月10日

復習問題 12.1 次に挙げるそれぞれの半順序集合に対して、そのハッセ図を描け。

1.  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ . ただし、 $a | b$ であることを「 $a$ は $b$ の約数である」と定義する.
2.  $(2^{\{1, 2, 3\}}, \subseteq)$ .
3.  $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$ .

復習問題 12.2 問題 11.1 の 1 に現れる半順序集合  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$  に対して、次の問いに答えよ。ただし、該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ。(いずれの場合も理由を添える必要はない。)

1.  $\{2, 3\}$  の上界をすべて挙げよ.
2.  $\{2\}$  の上界をすべて挙げよ.
3.  $\{2, 5\}$  の上界をすべて挙げよ.
4.  $\{2, 3\}$  の下界をすべて挙げよ.
5.  $\{2\}$  の下界をすべて挙げよ.
6.  $\{2, 6\}$  の下界をすべて挙げよ.
7.  $\{2, 3, 4\}$  の極大元をすべて挙げよ.
8.  $\{2, 3, 4\}$  の極小元をすべて挙げよ.
9.  $\{2, 3, 6\}$  の最大元をすべて挙げよ.
10.  $\{2, 3\}$  の最大元をすべて挙げよ.
11.  $\{1, 2, 3\}$  の最小元をすべて挙げよ.
12.  $\{2, 3\}$  の最小元をすべて挙げよ.
13.  $\{2, 3\}$  の上限をすべて挙げよ.
14.  $\{2\}$  の上限をすべて挙げよ.
15.  $\{2, 3\}$  の下限をすべて挙げよ.
16.  $\{2\}$  の下限をすべて挙げよ.

復習問題 12.3 全順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  と  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$  を考える。このとき、 $(\mathbb{R}, \leq)$  において  $B$  の極大元が存在しないことを証明せよ。

補足問題 12.4 全順序集合  $(A, \leq)$  を考える。このとき、任意の  $a, b \in A$  に対して、 $a \not\leq b$  であることと  $a \succ b$  であることが同値であることを証明せよ。

補足問題 12.5 半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$  を考える。

1.  $b_1$  と  $b_2$  が  $B$  の最大元であるならば、 $b_1 = b_2$  となることを証明せよ.
2.  $b$  が  $B$  の最大元であるならば、 $b$  は  $B$  の極大元であることを証明せよ.
3.  $a_1$  と  $a_2$  が  $B$  の上限であるならば、 $a_1 = a_2$  となることを証明せよ.

追加問題 12.6  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, |)$  という半順序集合のハッセ図を描け。

追加問題 12.7 半順序集合  $(2^{\{1, 2, 3, 4\}}, \subseteq)$  のハッセ図を描け。

追加問題 12.8 全順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  を考える。このとき、 $(\mathbb{R}, \leq)$  において  $\mathbb{R}$  の上界が存在しないことを証明せよ。

追加問題 12.9 問題 12.6 に現れる半順序集合に対して、次の問いに答えよ。ただし、該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ。(いずれの場合も理由を添える必要はない。)

1.  $\{2, 3\}$  の上界をすべて挙げよ.
2.  $\{3, 5\}$  の上界をすべて挙げよ.
3.  $\{6, 10\}$  の下界をすべて挙げよ.
4.  $\{8, 10, 12\}$  の下界をすべて挙げよ.
5.  $\{2, 3, 4, 5\}$  の極大元をすべて挙げよ.

6.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極大元をすべて挙げよ.
7.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極小元をすべて挙げよ.
8.  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  の極小元をすべて挙げよ.
9.  $\{2, 4, 6\}$  の最大元をすべて挙げよ.
10.  $\{2, 5, 10\}$  の最大元をすべて挙げよ.
11.  $\{2, 4, 6\}$  の最小元をすべて挙げよ.
12.  $\{2, 5, 10\}$  の最小元をすべて挙げよ.
13.  $\{2, 4, 6\}$  の上限をすべて挙げよ.
14.  $\{2, 5, 10\}$  の上限をすべて挙げよ.
15.  $\{2, 5, 10\}$  の下限をすべて挙げよ.
16.  $\{6, 8, 12\}$  の下限をすべて挙げよ.

**追加問題 12.10** 半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $B \subseteq A$  に対して,  $a \in A$  が  $B$  の上限であるとする. このとき,  $a \in B$  ならば,  $a$  は  $B$  の最大元であることを証明せよ.

**追加問題 (発展) 12.11** 集合  $A$  に対して,  $(2^A, \subseteq)$  という半順序集合を考える. 以下の問いに答えよ.

1. 任意の  $X, Y \in 2^A$  に対して,  $\{X, Y\}$  の上限が  $X \cup Y$  となることを証明せよ.
2. 任意の  $X, Y \in 2^A$  に対して,  $\{X, Y\}$  の下限が  $X \cap Y$  となることを証明せよ.