離散数学 (11) 2015 年 6 月 26 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2015 年 7 月 3 日

復習問題 11.1 集合 A の分割 P を考える．このとき，集合 A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$ であることとする．このとき，R が A 上の同値関係となることを証明せよ．

復習問題 11.2 集合 A 上の同値関係 R に対して，R に関する A の商集合 $A \,/\, \mathrm{R}$ が A の分割であることを証明せよ．

補足問題 11.3 集合 A 上の同値関係 R と，任意の要素 $a, a' \in A$ を考える．このとき，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$ ならば，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．

追加問題 11.4 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の同値関係 $\equiv_2$ を考える ($\equiv_2$ の定義は復習問題 10.6 を参照のこと)．このとき，商集合 $A \,/ \equiv_2$ がどのような集合であるか，記述せよ．また，商集合の要素数 $|A \,/ \equiv_2|$ が何であるかも答えよ．

追加問題 11.5 集合 A 上の同値関係 R に対して，写像 $g \colon A \to A \,/\, \mathrm{R}$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a \in A$ に対して，$g(a) = [a]_{\mathrm{R}}$ とする．このとき，g が全射となることを証明せよ．

追加問題 11.6 集合 A 上の関係 R_1，集合 B 上の関係 R_2 に対して，直積 $A \times B$ 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して，$(a, b) \mathrel{\mathrm{R}} (a', b')$ であることを，$a \mathrel{\mathrm{R}_1} a'$ かつ $b \mathrel{\mathrm{R}_2} b'$ であることとする．

1. 関係 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ がともに同値関係であるとき，R も同値関係であることを証明せよ．

2. 任意の $a \in A, b \in B$ に対して，

$$[a]_{\mathrm{R}_1} \times [b]_{\mathrm{R}_2} = [(a, b)]_{\mathrm{R}}$$

   が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 11.7 任意の集合 A, B と任意の写像 $f \colon A \to B$ を考える．A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする．このとき，R が同値関係となることは既に演習問題 10.9 で確認した．この同値関係 R を用いて，写像 $g \colon A \to A \,/\, \mathrm{R}$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a \in A$ に対して，$g(a) = [a]_{\mathrm{R}}$ とする．また，写像 $j \colon f(X) \to Y$ を次のように定義する．すなわち，任意の $y \in f(X)$ に対して，$j(y) = y$ とする．

このとき，$f = (j \circ h) \circ g$ を満たす全単射 $h \colon X \,/\, \mathrm{R} \to f(X)$ が存在することを証明せよ．また，そのような全単射はただ 1 つしか存在しないことを証明せよ．(ヒント：実際にそのような全単射を構成してみよ．)

補足：演習問題 11.5 より，g は全射である．また，j が単射であることも確認できる．すなわち，この問題の解答から，「任意の写像は全射，全単射，単射の合成として表現できる」ということが分かる．