離散数学 (10) **2015 年 6 月 19 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2015 年 6 月 26 日

復習問題 10.1 次に挙げるそれぞれの集合 A とその上の関係 R に対して，その関係を表現するグラフを描け．また，それぞれの関係が (a) 反射性を持つか，(b) 完全性を持つか，(c) 対称性を持つか，(d) 反対称性を持つか，(e) 推移性を持つか，それぞれ答えよ．

1. 集合 $A = \{1,2,3,6\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを x が y の約数であることと定義する．
2. 集合 $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ 上の関係 R で，任意の $X, Y \in A$ に対して $X \mathrel{\mathrm{R}} Y$ であることを $X \subseteq Y$ と定義する．
3. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $x < y$ と定義する．
4. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $x = y$ と定義する．
5. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 上の関係 R で，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $x \equiv y \pmod 3$ と定義する．

復習問題 10.2 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ が全順序であることを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の集合 A に対して，その冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ が半順序であることを証明せよ．

復習問題 10.4 1 以上の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_+$ と書くことにする．$\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して $a \mid b$ であることは a が b の約数であることとする．このとき，$|$ が半順序であることを証明せよ．

復習問題 10.5 $\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ が同値関係であることを証明せよ．

復習問題 10.6 p を 1 以上の整数として，$\mathbb{N}$ を 0 以上の整数全体の集合とする．$\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を次のように定義する．すなわち，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod p$ であることとする．このとき，$\equiv_p$ が同値関係であることを証明せよ．

追加問題 10.7 集合 $A = \{-1,-2,0,1,2\}$ 上の次の関係 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ に対して，その関係を表現するグラフを描け．また，それぞれの関係が (a) 反射性を持つか，(b) 完全性を持つか，(c) 対称性を持つか，(d) 反対称性を持つか，(e) 推移性を持つか，それぞれ答えよ．

1. 任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}_1} y$ であることを $x - y \leq 1$ であることとする．
2. 任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}_2} y$ であることを $|x - y| \leq 1$ であることとする．
3. 任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}_3} y$ であることを $x^2 - y^2 = 0$ であることとする．

追加問題 10.8 $\mathbb{R}^2$ 上の関係 $\preceq$ を次のように定義する．すなわち，任意の $(x,x'), (y,y') \in \mathbb{R}^2$ に対して，$(x,x') \preceq (y,y')$ であることを $x \leq y$ かつ $x' \leq y'$ であることとする．このとき，$\preceq$ が半順序となることを証明せよ．

追加問題 10.9 任意の集合 A, B と任意の写像 $f \colon A \to B$ を考える．A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする．このとき，R が同値関係となることを証明せよ．

追加問題 (発展) 10.10 $\mathbb{R}^2$ 上の関係 $\preceq$ を次のように定義する．すなわち，任意の $(x,x'), (y,y') \in \mathbb{R}^2$ に対して，$(x,x') \preceq (y,y')$ であることを

$x \geq y$ ならば「$x = y$ かつ $x' \leq y'$」

であることとする．このとき，$\preceq$ が全順序となることを証明せよ．(ヒント：$\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ が完全性，すなわち，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して「$x \leq y$ または $y \leq x$」を満たす，ということを使って，場合分けを行ってみよ．)