

提出締切：2015年6月19日

復習問題 9.1 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ に対して、次で定義される各写像が (a) 全射であるか、(b) 単射であるか、(c) 全単射であるか、理由も付けて答えよ。

1. $f_1: A \rightarrow B$ で, $f_1(1) = 1, f_1(2) = 3, f_1(3) = 1, f_1(4) = 3$.
2. $f_2: A \rightarrow B$ で, $f_2(1) = 3, f_2(2) = 1, f_2(3) = 3, f_2(4) = 2$.
3. $f_3: B \rightarrow A$ で, $f_3(1) = 2, f_3(2) = 4, f_3(3) = 2$.
4. $f_4: B \rightarrow A$ で, $f_4(1) = 2, f_4(2) = 1, f_4(3) = 3$.
5. $f_5: B \rightarrow B$ で, $f_5(1) = 2, f_5(2) = 2, f_5(3) = 1$.
6. $f_6: B \rightarrow B$ で, $f_6(1) = 3, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2$.

復習問題 9.2 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$ であるとして定義する。

1. 写像 f が全射であることを証明せよ。
2. 写像 f が単射であることを証明せよ。
3. 写像 f の逆写像 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が何であるか、答えよ。

復習問題 9.3 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する。

1. 写像 f が全射ではないことを証明せよ。
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ。

補足問題 9.4 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して、写像 $f: A \rightarrow B$ を任意の $a \in A$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する。以下のように A と B を定めるとき、写像 f が (a) 全射であるか、(b) 単射であるか、(c) 全単射であるか、理由も付けて答えよ。そして、(d) 全単射である場合は、その逆写像が何であるか、理由も付けて答えよ。

1. $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty), B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1], B = [0, \infty)$.

補足問題 9.5 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が全単射であるならば、 f の逆写像が存在することを証明せよ。

補足問題 9.6 この演習問題の目標は、任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 f の逆写像が存在するとき、 f が全単射であることを証明することである。次の流れに沿って証明を行ってみよ。

1. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、写像 $g \circ f$ が全射であるならば、 g も全射であることを証明せよ。
2. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、写像 $g \circ f$ が単射であるならば、 f も単射であることを証明せよ。
3. 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 f の逆写像が存在するならば、 f が全単射であることを証明せよ。

補足問題 9.7 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。写像 f が全単射であるとき、その逆写像 f^{-1} も全単射であることを証明せよ。

追加問題 9.8 次のそれぞれの写像が (a) 全射であるか、(b) 単射であるか、(c) 全単射であるか、理由も付けて答えよ。そして、(d) 全単射である場合は、その逆写像が何であるか、理由も付けて答えよ。

1. $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $f_1(a) = a^3$.
2. $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で、任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して、 $f_3(a) = 2a + 1$.

4. $f_4: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ で、任意の $a \in \{-1, 0, 1\}$ に対して、 $f_4(a) = a(a-1)(a+1)$.

追加問題 9.9 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、 f と g が全射であるとき、 $g \circ f$ も全射であることを証明せよ。

追加問題 9.10 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、 f と g が単射であるとき、 $g \circ f$ も単射であることを証明せよ。

追加問題 (発展) 9.11 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が全射であるとき、そのときに限り、任意の $Y \subseteq B$ に対して $Y = f(f^{-1}(Y))$ が成り立つことを証明せよ。

追加問題 (発展) 9.12 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が単射であるとき、そのときに限り、任意の $X \subseteq A$ に対して $X = f^{-1}(f(X))$ が成り立つことを証明せよ。

追加問題 (発展) 9.13 1つ以上の整数の集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ に対して、 X の要素である整数の中で最も小さいものを $\min X$ と表すことにする。例えば、 $X = \{-3, 0, 2\}$ であるとき、 $\min X = -3$ である。

写像 $f: 2^{\mathbb{Z}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$ を、任意の $X \in 2^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\min X\} & (X \neq \emptyset \text{ のとき}), \\ \emptyset & (X = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

であると定義する。以下の問いに答えよ。

1. 写像 f が全射であることを証明せよ。
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ。

(注意：発展問題であるが、何を問われているのか理解することが難しいかもしれない。何を問われているのか理解できれば、証明自体は難しくない。)

補足問題 9.14 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ と任意の写像 $g: B \rightarrow A$ を考える。このとき、 g が f の逆写像であることと $g \circ f = \text{id}_A$ が成り立つことが同値であることを証明せよ。(ヒント：「 $g \circ f = \text{id}_A$ が成り立つとき、 g が f の逆写像である」ことを証明するとき、 f が全射であるという性質を利用せよ。)

補足問題 9.15 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ と任意の写像 $g: B \rightarrow A$ を考える。このとき、 g が f の逆写像であることと $f \circ g = \text{id}_B$ が成り立つことが同値であることを証明せよ。(ヒント：「 $f \circ g = \text{id}_B$ が成り立つとき、 g が f の逆写像である」ことを証明するとき、 f が単射であるという性質を利用せよ。)