

提出締切：2015年5月8日

復習問題 4.1 同値変形によって、任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.2 同値変形によって、任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.3 次の命題を証明せよ。

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する。

復習問題 4.4 次の命題を証明せよ。

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 である自然数が存在する。

復習問題 4.5 次の命題を証明せよ。

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数が存在する。

復習問題 4.6 次の命題を証明せよ。

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。

復習問題 4.7 次の命題を証明せよ。

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。

復習問題 4.8 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

任意の異なる素数 a, b に対して、 $a+b$ は 2 で割り切れる。

復習問題 4.9 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

任意の実数 x に対して、 $x^2 > 0$ である。

追加問題 4.10 同値変形によって、任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \exists x (Q(x)))$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 4.11 同値変形によって、任意の命題関数 $P(x)$ と命題 Q に対して次が成り立つことを証明せよ。ただし、 Q の中に x は自由変数として現れないものとする。

$$1. \forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x)) \rightarrow Q.$$

$$2. \forall x (Q \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \rightarrow \forall x (P(x)).$$

追加問題 (発展) 4.12 同値変形によって、任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ と命題 R に対して次が成り立つことを証明せよ。ただし、 R の中に x, y は自由変数として現れないものとする。

$$1. (\exists x P(x) \vee R) \rightarrow \forall x (Q(x)) \\ \Leftrightarrow \forall x (\forall y ((P(x) \vee R) \rightarrow Q(y))).$$

追加問題 4.13 次の命題を証明せよ。

$x^2 + y^2 - 2xy = 1$ を満たす実数 x と y が存在する。

追加問題 4.14 次の命題を証明せよ。

3 で割ると余りが 1 であり、7 で割ると余りが 5 であるような自然数が存在する。

追加問題 4.15 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

任意の実数 x に対して、 $(3x-2)^2 \geq (x-3)^2$ となる。