

提出締切：2015年5月1日

復習問題 3.1 集合 A を $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall n \in A$ (n は自然数である).
2. $\forall n \in A$ (n は偶数である).
3. $\exists n \in A$ (n は偶数である).
4. $\exists n \in A$ (n は自然数である).
5. $\exists n \in A$ (n は素数である).
6. $\exists n \in A$ (n は負の数である).

復習問題 3.2 集合 A を $A = \{1, 2\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall m \in A$ ($\forall n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
2. $\exists m \in A$ ($\forall n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
3. $\forall m \in A$ ($\exists n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
4. $\exists m \in A$ ($\exists n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).

補足問題 3.3 議論領域 D と命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して、次の論理式を考える。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $(\forall x \in D (P(x)) \wedge \forall x \in D (Q(x)))$
 $\leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x))$.
2. $(\exists x \in D (P(x)) \vee \exists x \in D (Q(x)))$
 $\leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x))$.

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

補足問題 3.4 議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して、次の論理式を考える。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $\forall x \in D$ ($\forall y \in D (P(x, y))$)
 $\leftrightarrow \forall y \in D$ ($\forall x \in D (P(x, y))$).

2. $\exists x \in D$ ($\exists y \in D (P(x, y))$)
 $\leftrightarrow \exists y \in D$ ($\exists x \in D (P(x, y))$).

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

補足問題 3.5 議論領域 D と命題 P に対して、次の論理式を考える。ただし、 P の中に x は自由変数として現れないものとする。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $P \leftrightarrow \forall x \in D (P)$.
2. $P \leftrightarrow \exists x \in D (P)$.

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

追加問題 3.6 集合 A と B を $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall m \in A$ ($\forall n \in B$ ($m < n$ である)).
2. $\exists m \in A$ ($\forall n \in B$ ($m < n$ である)).
3. $\forall m \in A$ ($\exists n \in B$ ($m < n$ である)).
4. $\exists m \in A$ ($\exists n \in B$ ($m < n$ である)).
5. $\forall n \in B$ ($\forall m \in A$ ($m < n$ である)).
6. $\exists n \in B$ ($\forall m \in A$ ($m < n$ である)).
7. $\forall n \in B$ ($\exists m \in A$ ($m < n$ である)).
8. $\exists n \in B$ ($\exists m \in A$ ($m < n$ である)).

追加問題 (発展) 3.7 自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、命題関数 $P(n)$ で n が素数であること、命題関数 $Q(m, n)$ で $m < n$ であること、命題関数 $R(m, n)$ で m が n の約数であることを表す。次に挙げるそれぞれの文を $P(n)$, $Q(m, n)$, $R(m, n)$ の中のいくつかを用いた述語論理式として表現せよ。

1. 自然数全体の集合 \mathbb{N} において、最小の素数が存在する。

2. 自然数全体の集合 \mathbb{N} において、最小の素数はただ1つ存在する.
3. 自然数全体の集合 \mathbb{N} において、素数は無限に存在する.