グラフとネットワーク 第 4 回
全域木：数理
交換可能性に関する補足

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 16 日

最終更新：2014 年 5 月 16 日　10:16

この補足の目的：次の 3 つの違いを確認する

連結無向グラフ $G = (V, E)$，G の全域木 $T_1 = (V, E_1), T_2 = (V, E_2)$

全域木の交換可能性 ($-+$ 版)

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_1 - e_1) + e_2$ も G の全域木

全域木の交換可能性 ($+-$ 版)

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_2 + e_1) - e_2$ も G の全域木

全域木の同時交換可能性

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_1 - e_1) + e_2$ と $(T_2 + e_1) - e_2$ のどちらも G の全域木

連結無向グラフ $G=(V,E)$，G の全域木 $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$

全域木の交換可能性 (−+ 版)

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_1 - e_1) + e_2$ も G の全域木

格言　　（「離散数学」の講義より）

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

- ∀ : 相手の手番　　(任意の〜に対して)
- ∃ : 自分の手番　　(ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

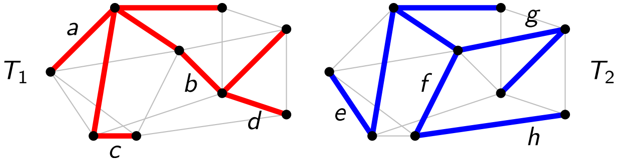
全域木の交換可能性 (−+ 版)：ゲームとしての解釈

相手がどんな $e_1 \in E_1 - E_2$ を選んでも，
自分がうまく $e_2 \in E_2 - E_1$ を選ぶことで，
$(T_1 - e_1) + e_2$ が G の全域木となるようにできる

全域木の交換可能性 ($-+$ 版)：ゲームとしての解釈

相手がどんな $e_1 \in E_1 - E_2$ を選んでも，
自分がうまく $e_2 \in E_2 - E_1$ を選ぶことで，
$(T_1 - e_1) + e_2$ が G の全域木となるようにできる

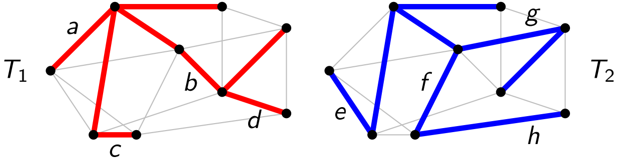
相手が取りうる手の全体を考える必要がある



この例では

- $E_1 - E_2 = \{a, b, c, d\}$ ← 相手の取りうる手全体の集合
- $E_2 - E_1 = \{e, f, g, h\}$ ← 自分が取れる手全体の集合

相手が取りうる手の全体を考える必要がある



相手の手	自分の応手
a	e
b	f か g
c	f か h
d	h

- これが自分にとっての必勝戦略
- 注意：相手の手が b か c であるとき，自分の応手が複数ある

連結無向グラフ $G=(V,E)$，G の全域木 $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$

全域木の交換可能性 (+− 版)

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_2+e_1)-e_2$ も G の全域木

格言 （「離散数学」の講義より）

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

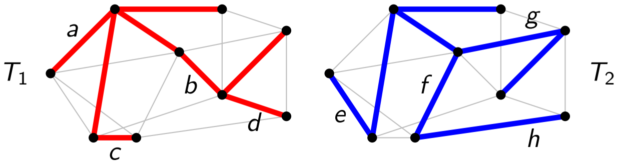
- ∀：相手の手番 (任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

全域木の交換可能性 (+− 版)：ゲームとしての解釈

相手がどんな $e_1 \in E_1 - E_2$ を選んでも，
自分がうまく $e_2 \in E_2 - E_1$ を選ぶことで，
$(T_2+e_1)-e_2$ が G の全域木となるようにできる

相手が取りうる手の全体を考える必要がある



相手の手	自分の応手
a	e
b	g
c	f
d	f か g か h

- これが自分にとっての必勝戦略
- 注意：相手の手が d であるとき，自分の応手が複数ある

全域木の同時交換可能性

連結無向グラフ $G = (V, E)$，G の全域木 $T_1 = (V, E_1), T_2 = (V, E_2)$

全域木の交換可能性 (+− 版)

任意の $e_1 \in E_1 - E_2$ に対して，ある $e_2 \in E_2 - E_1$ が存在して，
$(T_1 - e_1) + e_2$ と $(T_2 + e_1) - e_2$ のどちらも G の全域木

格言　（「離散数学」の講義より）

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

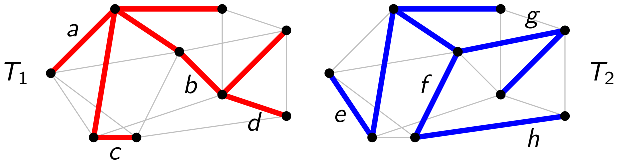
- ∀：相手の手番　(任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番　(ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

全域木の交換可能性 (+− 版)：ゲームとしての解釈

相手がどんな $e_1 \in E_1 - E_2$ を選んでも，
自分がうまく $e_2 \in E_2 - E_1$ を選ぶことで，
$(T_1 - e_1) + e_2$ と $(T_2 + e_1) - e_2$ が G の全域木となるようにできる

相手が取りうる手の全体を考える必要がある



相手の手	自分の応手
a	e
b	g
c	f
d	h

- これが自分にとっての必勝戦略

<table>
<tr><td rowspan="2">相手の手</td><td colspan="3">自分の応手</td></tr>
<tr><td>交換可能性
($-+$ 版)</td><td>交換可能性
($+-$ 版)</td><td>同時交換可能性</td></tr>
<tr><td>a</td><td>e</td><td>e</td><td>e</td></tr>
<tr><td>b</td><td>f か g</td><td>g</td><td>g</td></tr>
<tr><td>c</td><td>f か h</td><td>f</td><td>f</td></tr>
<tr><td>d</td><td>h</td><td>f か g か h</td><td>h</td></tr>
</table>

例えば，相手が $e_1 = b$ を選んだとき，

- 自分が $e_2 = f$ を選ぶと，$(T_1 - e_1) + e_2$ は G の全域木であるが，$(T_2 + e_1) - e_2$ は G の全域木ではない
- つまり，同時交換可能性の証明において，e_2 の選び方を単に「$-+$ 版のときと同じ」とすることはできない