グラフとネットワーク 第 11 回
彩色：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 6 月 20 日

最終更新：2014 年 6 月 19 日　13:54

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. 全域木：数理 (5/2)
5. マッチング：数理 (5/9)
6. マッチング：モデル化 (5/16)
7. 最大流：数理 (5/23)
8. 最大流：モデル化 (1) (5/30)
9. 最大流：モデル化 (2) (6/6)

スケジュール 後半 (予定)

10. 連結性：モデル化 (6/13)
11. 彩色：数理 (6/20)
- 中間試験 (6/27)
- * 休講 (7/4)

12. 彩色：モデル化 (7/11)
13. 平面グラフ：数理 (7/18)
14. 平面グラフ：モデル化 (7/25)

- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界

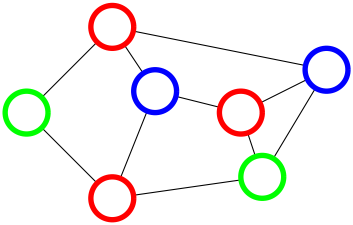
目次

無向グラフの彩色

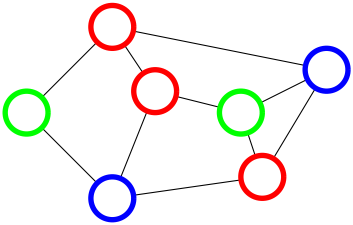
無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とは？ (直感的な定義)

G の彩色 (さいしょく) とは,
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である



彩色ではない

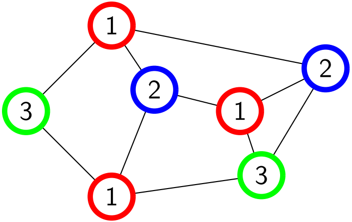
彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

無向グラフの彩色：形式的な定義

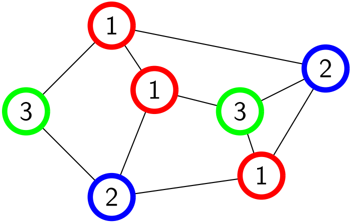
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 彩色とは，写像 $c \colon V \to \{1, \ldots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である



3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

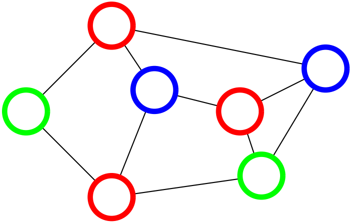
彩色可能性

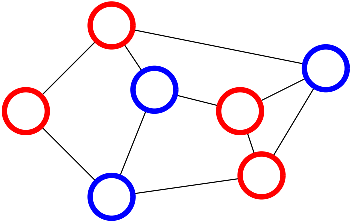
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色可能性とは？

G が k 彩色可能であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である





3 彩色である　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

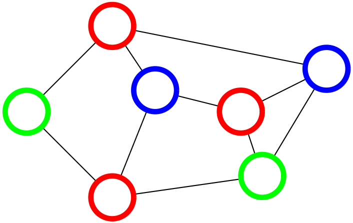
染色数

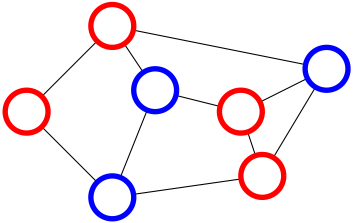
無向グラフ $G = (V, E)$

染色数とは？

G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



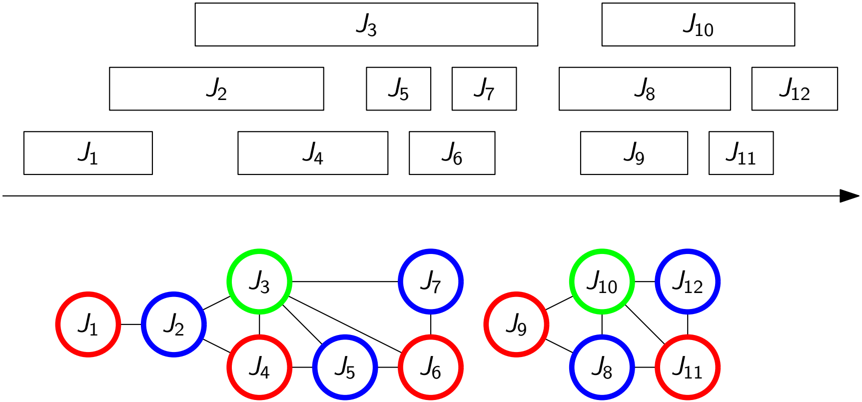


3 彩色である

2 彩色は存在しない

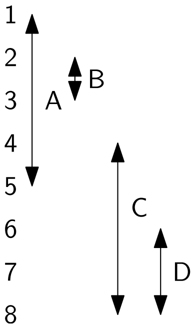
$\therefore$ このグラフの染色数は 3

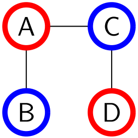
彩色が現れる場面 (1)：ジョブスケジューリング



彩色が現れる場面 (2)：レジスタ割当

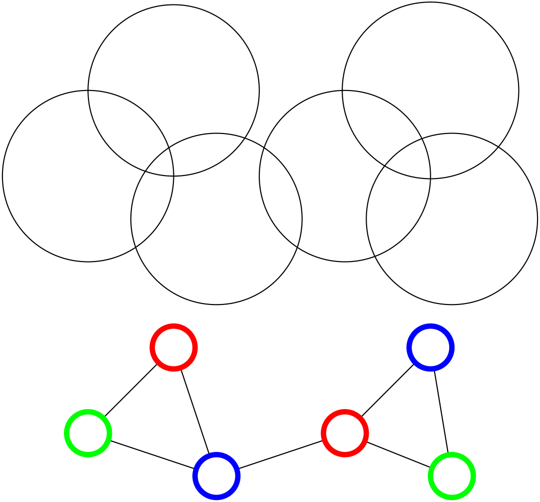
```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```






```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```

彩色が現れる場面 (3)：移動体通信における周波数割当



2 彩色可能性と二部グラフ

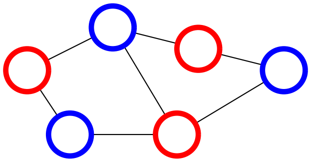
無向グラフ $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Rightarrow$」の証明：G は 2 彩色可能であるとする

- G の 2 彩色を 1 つ考え，その彩色クラスを A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を部集合とする二部グラフである



2 彩色可能性と二部グラフ (続)

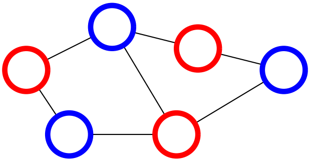
無向グラフ $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

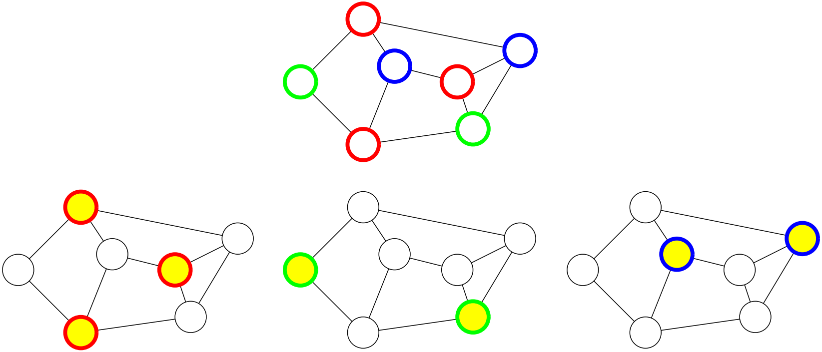
G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Leftarrow$」の証明：G は二部グラフであるとする

- G の部集合を A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を彩色クラスとする 2 彩色を持つ $\square$



彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

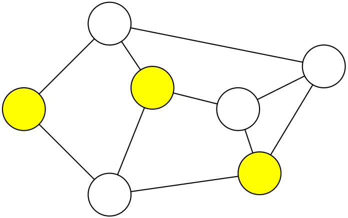
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

独立集合

無向グラフ $G = (V, E)$

独立集合とは？

G の独立集合とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



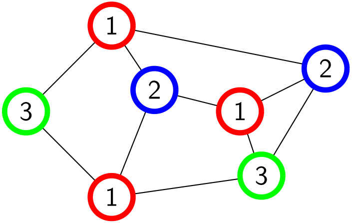
無向グラフの彩色：独立集合を用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

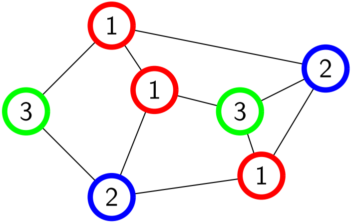
彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

G の k 彩色とは，
k 個の独立集合 $I_1, \ldots, I_k$ への頂点集合 V の分割

- $V = I_1 \cup \cdots \cup I_k$
- 任意の $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$I_i \cap I_j = \emptyset$



3 彩色である



3 彩色ではない

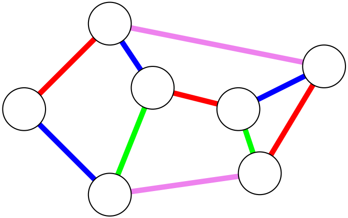
目次

無向グラフの辺彩色

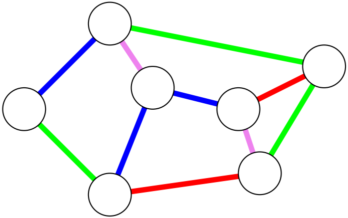
無向グラフ $G = (V, E)$

辺彩色とは？ (直感的な定義)

G の辺彩色 (さいしょく) とは,
G の辺への色の割当で，端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である



辺彩色ではない

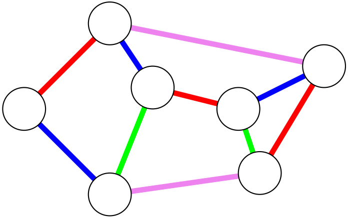
辺彩色において，同じ色を持つ辺の集合を彩色クラスとも呼ぶ

無向グラフの辺彩色：形式的な定義

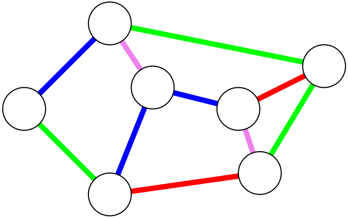
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

辺彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 辺彩色とは，写像 $c \colon E \to \{1, \ldots, k\}$ で，
端点を共有する任意の辺 $e, f \in E$ に対して $c(e) \neq c(f)$ を満たすもの



4 辺彩色である



4 辺彩色ではない

c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

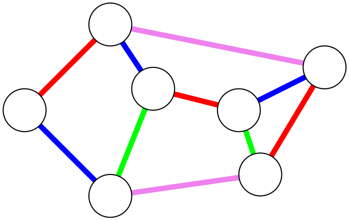
辺彩色可能性

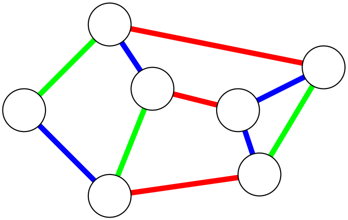
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

辺彩色可能性とは？

G が k 辺彩色可能であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 4 辺彩色可能である





4 辺彩色である　　3 辺彩色は存在しない

注：G が k 辺彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 辺彩色可能

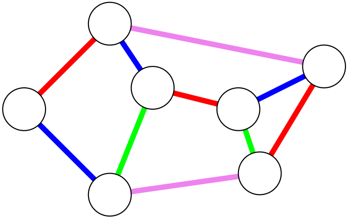
辺染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

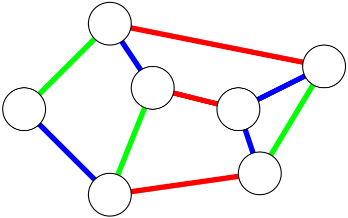
染色数とは？

G の辺染色数とは，G の k 辺彩色が存在するような最小の k

G の辺染色数を $\chi'(G)$ で表す



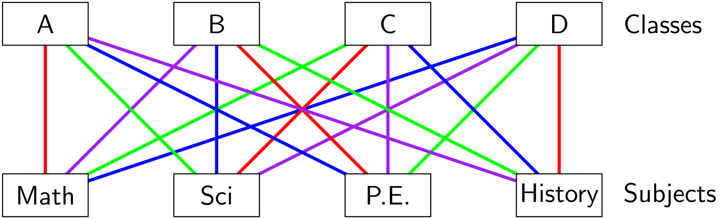
4 辺彩色である



3 辺彩色は存在しない

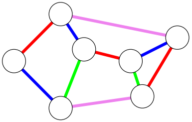
$\therefore$ このグラフの辺染色数は 4

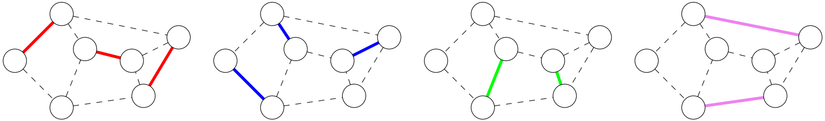
辺彩色が現れる場面：時間割作成



	A	B	C	D
1	Math	P.E.	Sci	History
2	Sci	History	Math	P.E.
3	P.E.	Sci	History	Math
4	History	Math	P.E.	Sci

彩色クラスとマッチング





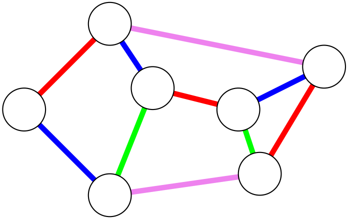
辺彩色の各彩色クラスはマッチング

無向グラフの辺彩色：マッチングを用いた定義

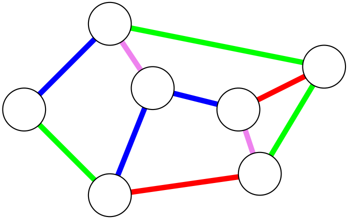
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

辺彩色とは？(マッチングを用いた定義)

G の k 辺彩色とは，
k 個のマッチング $M_1, \ldots, M_k$ への辺集合 E の分割



4 辺彩色である



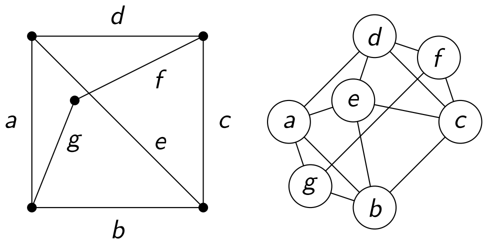
4 辺彩色ではない

辺彩色は彩色の特殊な場合

線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の**線グラフ** $L(G)$ とは

- 頂点集合が E であり，
- 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ と e_2 が共通端点を持つ $\}$



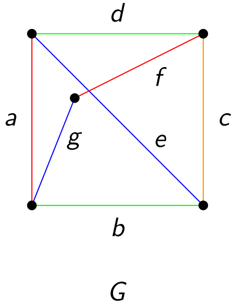
G $L(G)$

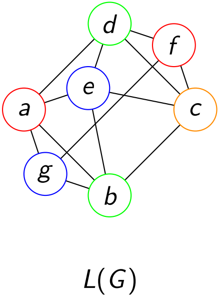
辺彩色は彩色の特殊な場合

線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の線グラフ $L(G)$ とは

- 頂点集合が E であり,
- 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ と e_2 が共通端点を持つ $\}$

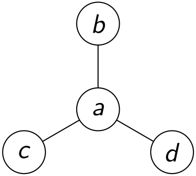




G の辺彩色 $\leftrightarrow$ $L(G)$ の彩色

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)

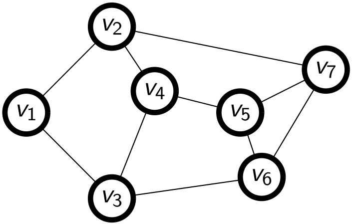


目次

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

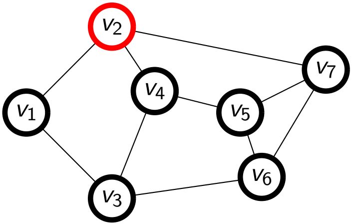


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

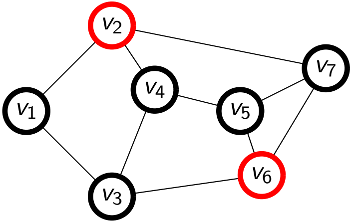


全順序 σ： v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

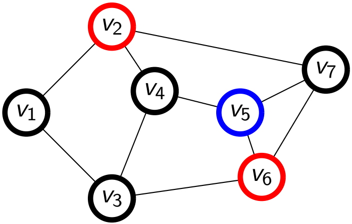


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

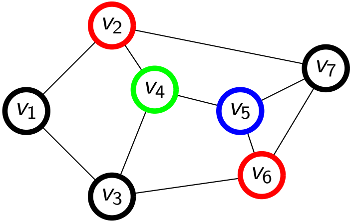


全順序 σ : v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

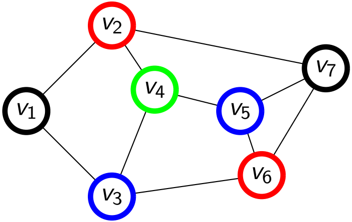


全順序 σ：v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

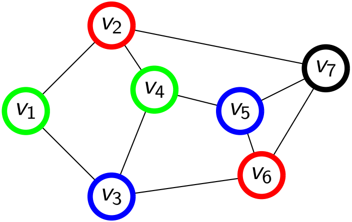


全順序 σ: $v_2\ v_6\ v_5\ v_4\ v_3\ v_1\ v_7$

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

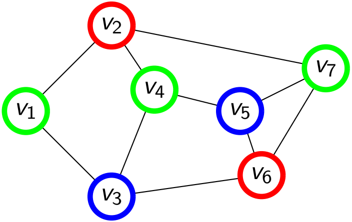


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

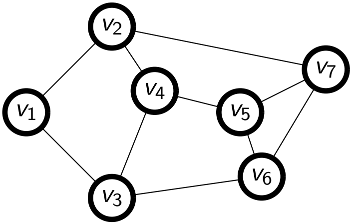


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

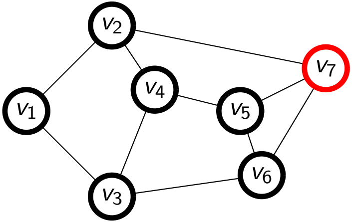


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

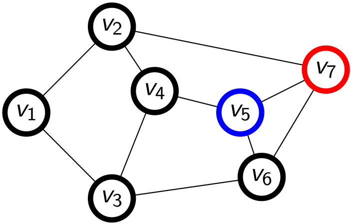


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

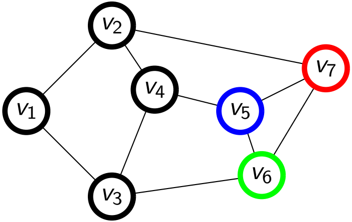


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

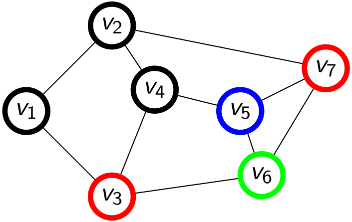


全順序 σ： v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

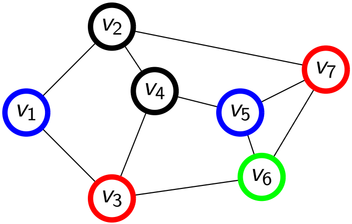


全順序 σ : v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

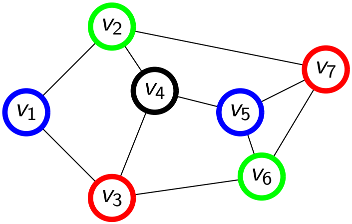


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \dots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

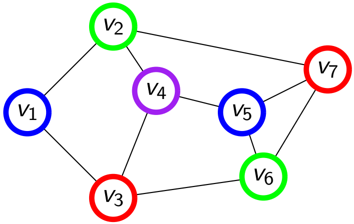


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)



全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価

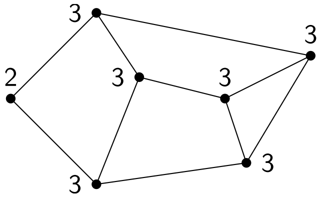
貪欲彩色が費やす色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と V 上の任意の全順序 σ に対して，

$$\chi(G) \leq \begin{array}{l}\sigma \text{ に従う } G \text{ の貪欲} \\ \text{彩色が費やす色数}\end{array} \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の**最大次数** $\Delta(G)$ とは，その頂点の次数の最大値

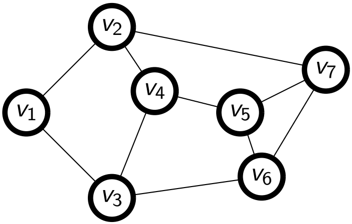


$\Delta(G) = 3$

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

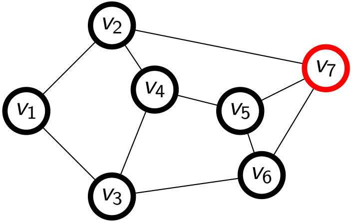


全順序 σ: $v_7\ v_5\ v_6\ v_3\ v_1\ v_2\ v_4$

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

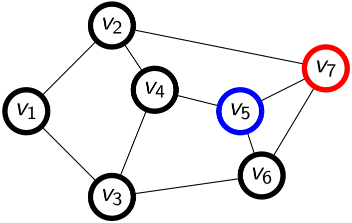


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

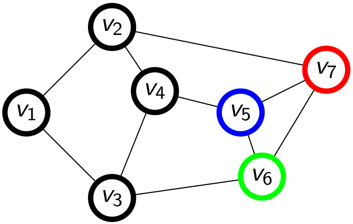


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

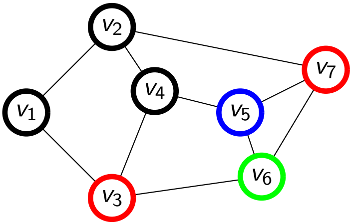


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

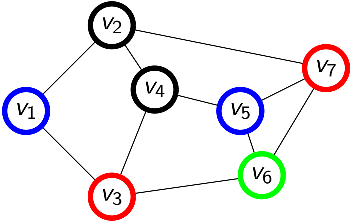


全順序 σ: $v_7 \ v_5 \ v_6 \ v_3 \ v_1 \ v_2 \ v_4$

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$

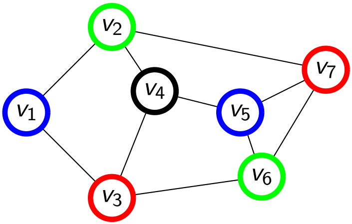


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる
  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない □

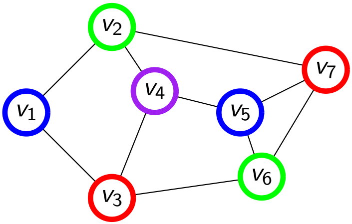


全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- $\therefore v$ を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg_G(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない $\square$



全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり，σ を変えると，異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば，貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり，染色数を計算するためには，うまい全順序を見つければよい

今からやること

- そのようなうまい全順序をどう見つけるか？ (次回)
- その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

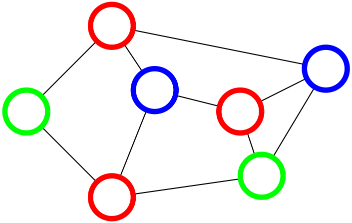
実は，いつもうまくいくとは限らないが，うまくいく場合を紹介する

目次

彩色の最適性

染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

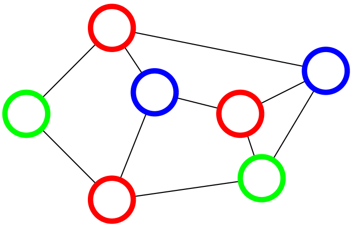


$$\chi(G) = 3$$

彩色の最適性

染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



$\chi(G) = 3$???

疑問

- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

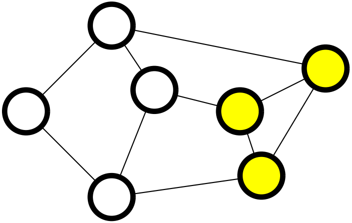
$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)

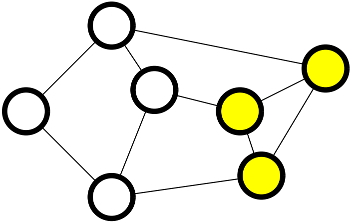


クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

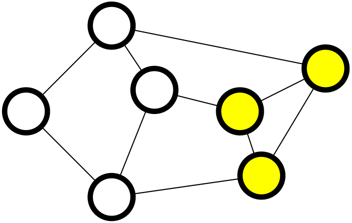
なぜか？

クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感：C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

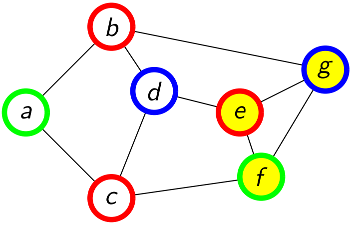
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



	e	f	g
$\{b, c, e\}$	1		
$\{d, g\}$			1
$\{a, f\}$		1	

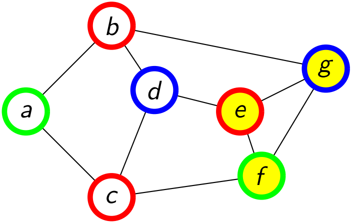
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



	e	f	g
$\{b, c, e\}$	1		
$\{d, g\}$			1
$\{a, f\}$		1	
	$= 1$	$= 1$	$= 1$

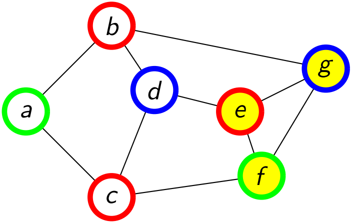
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



	e	f	g	
$\{b, c, e\}$	1			≤ 1
$\{d, g\}$			1	≤ 1
$\{a, f\}$		1		≤ 1
	$= 1$	$= 1$	$= 1$	

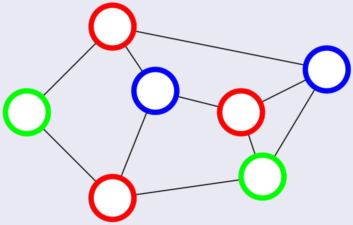
彩色とクリークの弱双対性

証明：

- 色数 $\chi(G)$ の彩色を独立集合 $I_1, \ldots, I_{\chi(G)}$ への V の分割として考える.
- 各独立集合 I_i と C は頂点を 2 つ以上共有しないので,
$$|\{i, v\} \in \{1, \ldots, \chi(G)\} \times C \mid v \in I_i\}|$$
$$= \sum_{i=1}^{\chi(G)} |\{v \in C \mid v \in I_i\}| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |I_i \cap C| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$
- 各 $v \in C$ は $I_1, \ldots, I_{\chi(G)}$ の中のちょうど 1 つの要素なので
$$|\{i, v\} \in \{1, \ldots, \chi(G)\} \times C \mid v \in I_i\}|$$
$$= \sum_{v \in C} |\{i \in \{1, \ldots, \chi(G)\} \mid v \in I_i\}| = \sum_{v \in C} 1 = |C|$$
- したがって,
$$\chi(G) \geq |\{i, v\} \in \{1, \ldots, \chi(G)\} \times C \mid v \in I_i\}| = |C|. \quad \square$$

彩色が最適であることの確認法

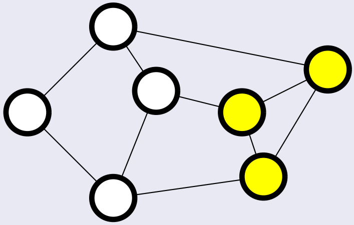
$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

- k 色で塗る　　(つまり，$\chi(G) \leq k$)
- 頂点数 k のクリークを見つける　　(つまり，$\chi(G) \geq k$)
- したがって，$\chi(G) = k$

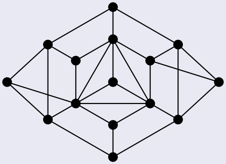
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

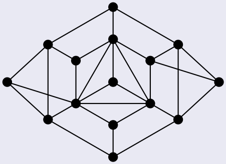
頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

彩色の最適性の証明：例

$\chi(G)$ の上界

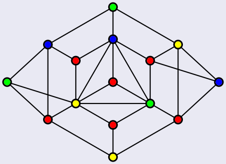


$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

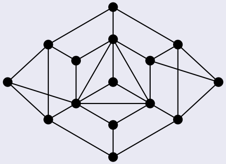
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

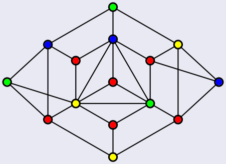
$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

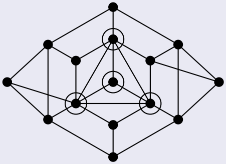
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界

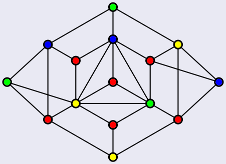


頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

彩色の最適性の証明：例

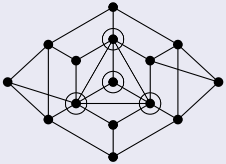
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 4$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

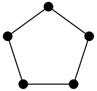
- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)

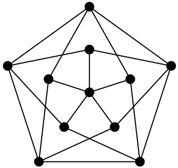
頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

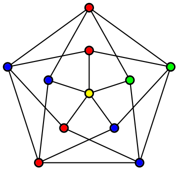
Grötzsch グラフ



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

Grötzsch グラフ



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

目次

今日のまとめ

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次