グラフとネットワーク 第 9 回
最大流：モデル化 (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 6 月 6 日

最終更新：2014 年 6 月 12 日　15:54

スケジュール 前半

スケジュール 後半 (予定)

10. 連結性：モデル化 (6/13)
11. 彩色：数理 (6/20)
- 中間試験 (6/27)
- * 休講 (7/4)
12. 彩色：モデル化 (7/11)
13. 平面グラフ：数理 (7/18)
14. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

最大流問題を用いて様々な問題がモデル化できるようになる

- 割当問題
- リーグ戦における優勝可能性判定問題
- 露天掘り問題

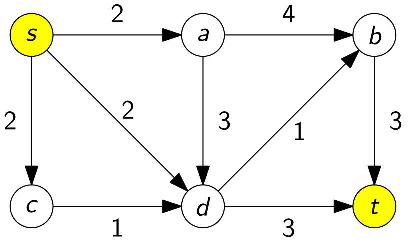
目次

最大流問題とは？

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$
(弧の容量は非負実数)

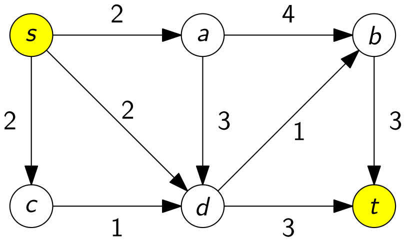


最大流問題とは？

最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの (s から t へ至る最大流)



流れとは？ (1)

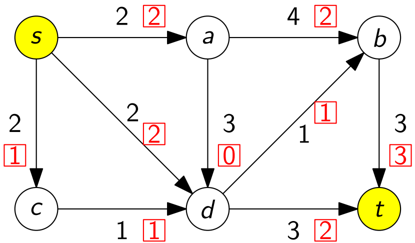
s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，　　(流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量)　　(v から流出する総量)



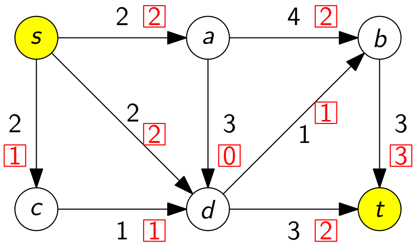
流れとは？ (2)

s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f \colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において， (容量制約)

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

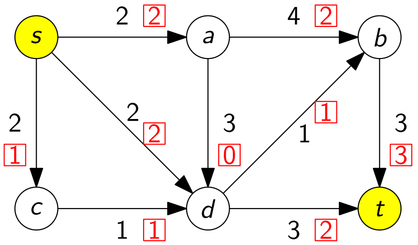


流れの値

流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し，$\mathtt{val}(f)$ と表記する

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

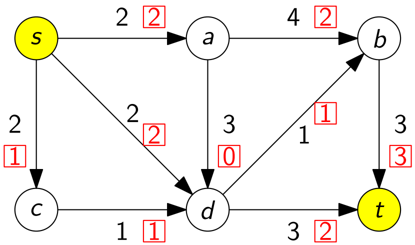


この流れの値は 5

最大流

最大流とは？

s から t へ至る流れ f が**最大流**であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \leq \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと

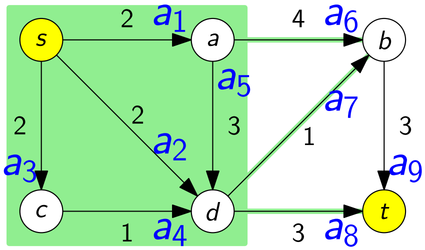


注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

カット

s, t カットとは？

s, t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



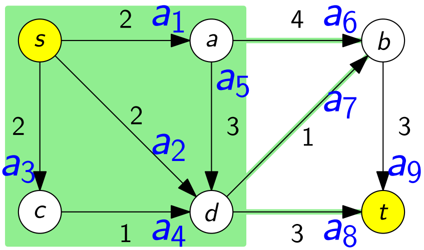
イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

s, t カットの容量とは？

s, t カット S の**容量**とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v))$$

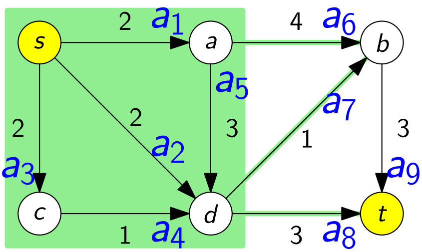


S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

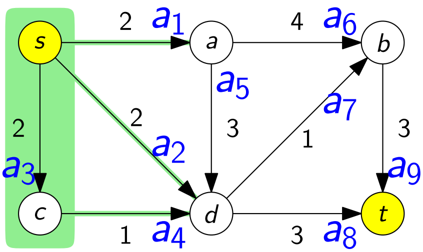
最小カット

最小 s, t カットとは？

最小 s, t カットとは，s, t カット S で，
任意の s, t カット S' に対して，$\mathrm{cap}(S) \leq \mathrm{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s, t カットではない



最小 s, t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G=(V,A)$，容量 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f)\le\mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G=(V,A)$，容量 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f)\le\mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

f が最大流
S が s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f)\le\mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

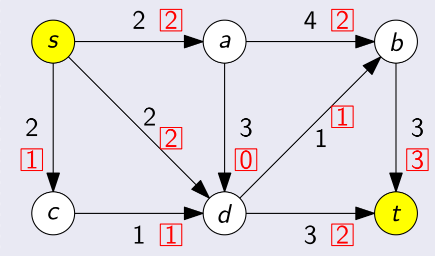
f が最大流
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
S が最小 s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

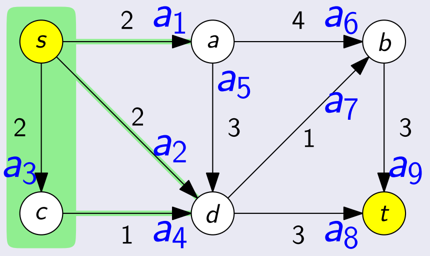
弱双対性の使い方

下界



最大流の値 ≥ 5

上界



最大流の値 ≤ 5

したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある s, t カットは最小 s, t カットであり，その容量は 5

最大流最小カット定理 と 整数流定理

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson ’56)

f が最大流
S が最小 s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

注意

弱双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば f は最大流

強双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

整数流定理 (重要)

容量が整数 $\Rightarrow$ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

目次

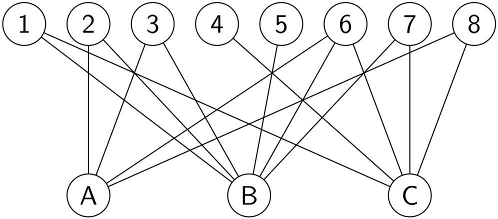
例：オアシスでの救護

- 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- 遭難者は 8 人，オアシスは 3 か所
- 各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通り
- [問い] どの遭難者も 3km 以上歩かせずに，全員救護できるか？
- 可能ならば，どの遭難者をどのオアシスに歩かせればよいか？

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

グラフを使って状況整理

- 上側：遭難者，下側：オアシス
- 辺：距離が 3km 未満のオアシスと遭難者の間

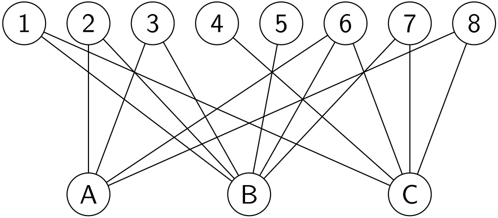


距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する



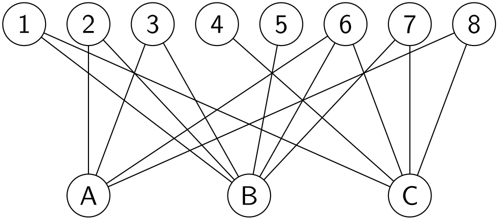
最大救護可能人数を計算する，という問題として捉える

最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？

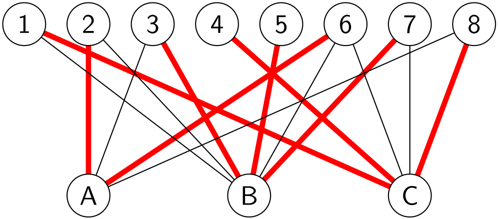


最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

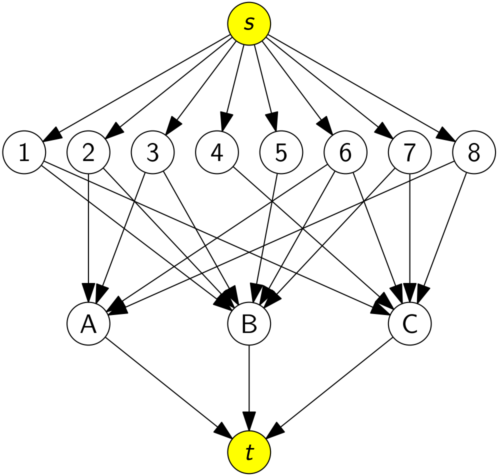
考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？



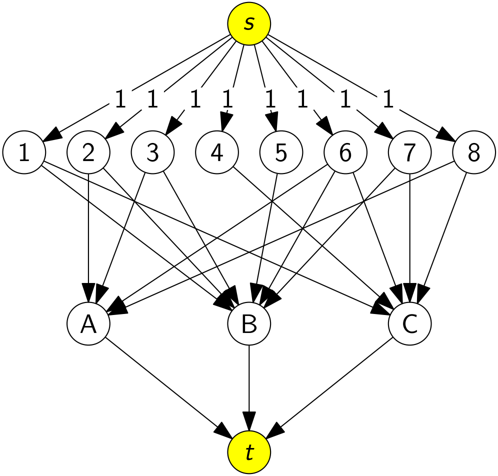
最大流問題としてのモデル化

s と t を新しい頂点として用意して，このように弧を作る



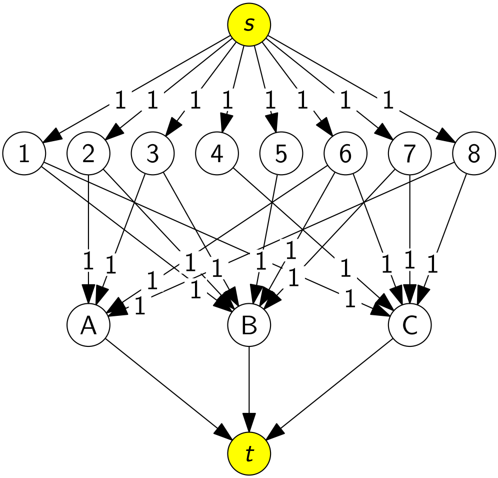
最大流問題としてのモデル化

s と遭難者の間の弧容量はどれも 1



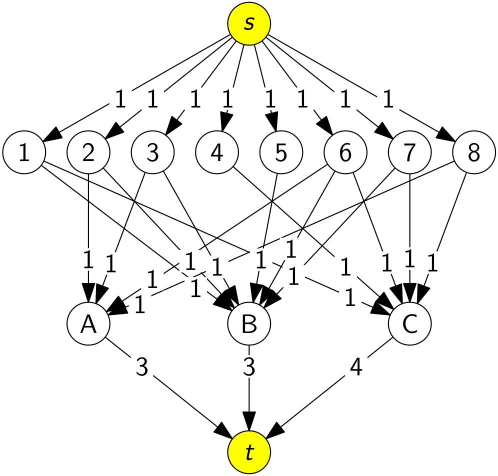
最大流問題としてのモデル化

遭難者とオアシスの間の弧容量はどれも 1 (非負整数なら何でもよい)

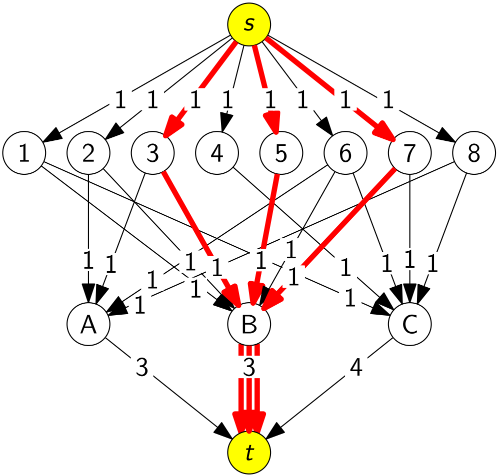


最大流問題としてのモデル化

オアシスと t の間の弧容量はオアシスの救護可能人数

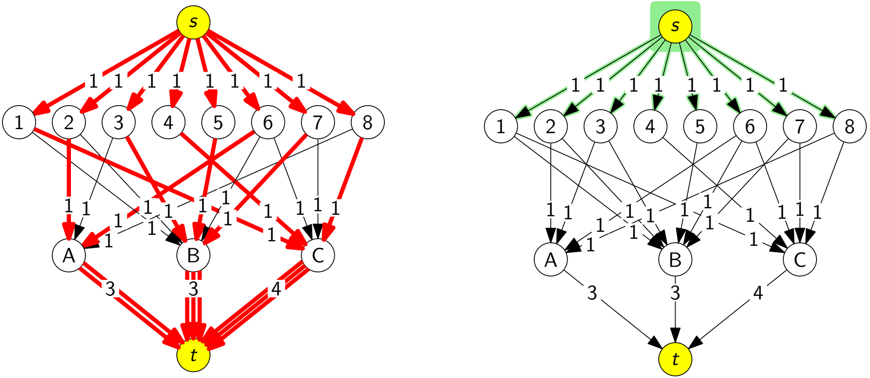


直感：オアシス B で遭難者 3，5，7 を救護してる様子



最大流と最小カット

増加道法を適用すると，例えば，次の最大流と最小カットが得られる



最大流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量 $= 8$

「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

目次

MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

質問

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了
- しかし，このとき，BOS は NYY から 8 勝している
- つまり，BOS の最終成績は 77 勝以上
- ∴ DET は優勝できない

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ここからの目標

MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

ここからの目標

TOR と DET が優勝できるかどうか，最大流問題を使って判定する

最大流問題としてのモデル化：着眼点

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYY と BAL に対して「8」という勝利を割り当てる

TOR の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

TOR は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

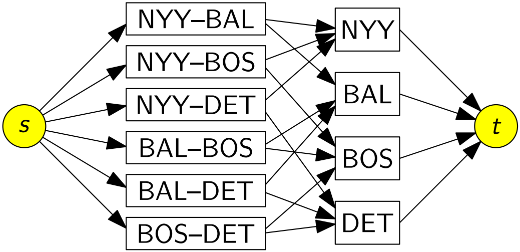
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

TOR の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

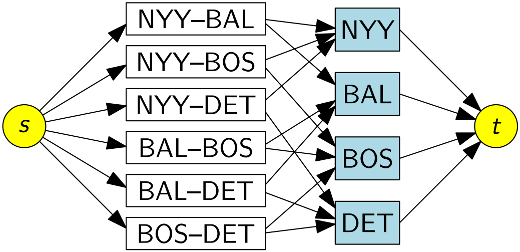


有向グラフの構成

TOR の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

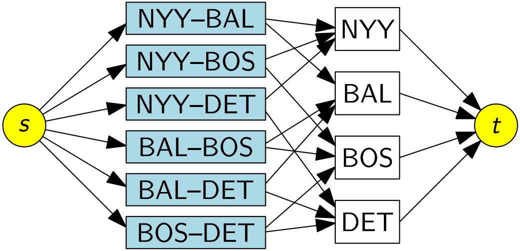


各チームに対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

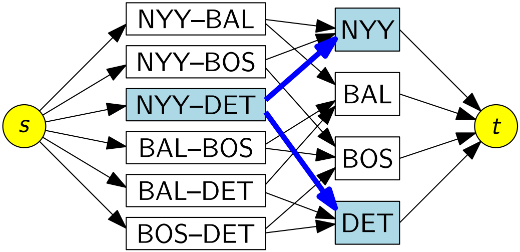


各対戦に対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

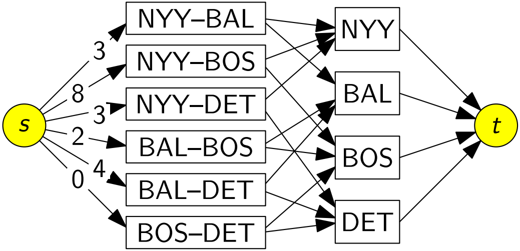


対戦を行うチームに向かって弧を引く

TOR の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

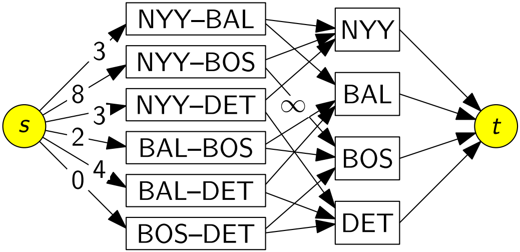


残り対戦数

TOR の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

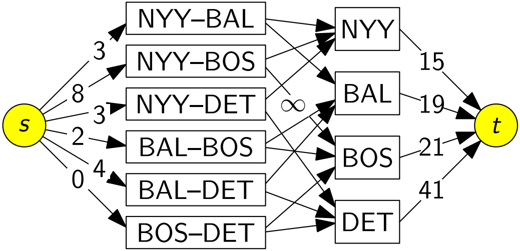


「真ん中」の弧の容量はどれも ∞

TOR の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

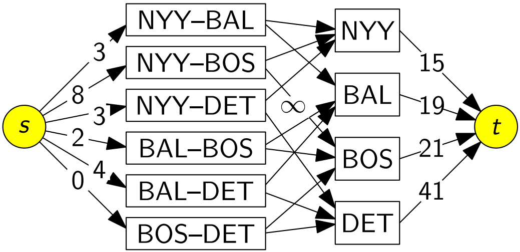


TOR が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

TOR の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

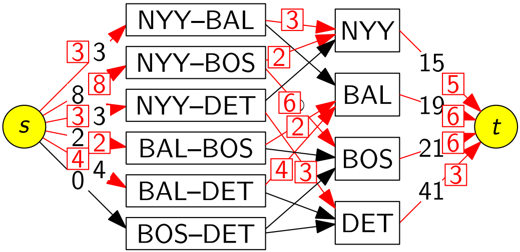


最大流の値が $3+8+3+2+4+0=20 \Leftrightarrow$ TOR は優勝可能

TOR の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

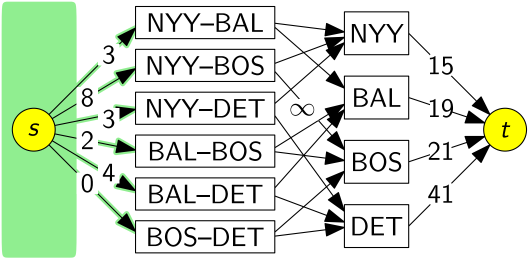


これが最大流で，その値は 20

TOR の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

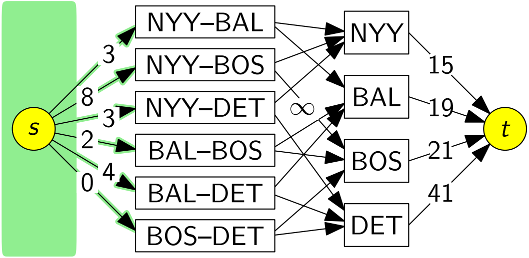


なぜならば，容量が 20 の s, t カットが存在するから

TOR の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0



結論：TOR は優勝できる

DET の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

DET は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

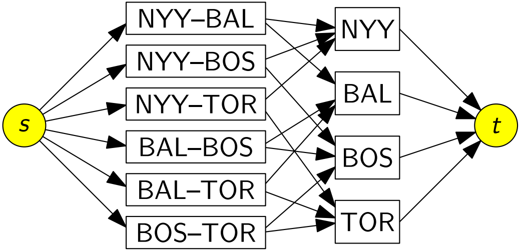
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

DET の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

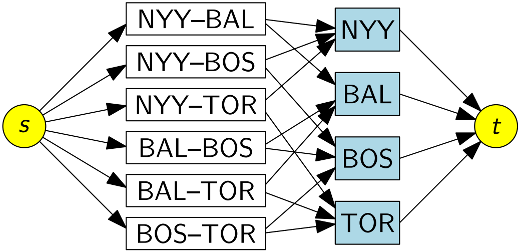


有向グラフの構成

DET の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

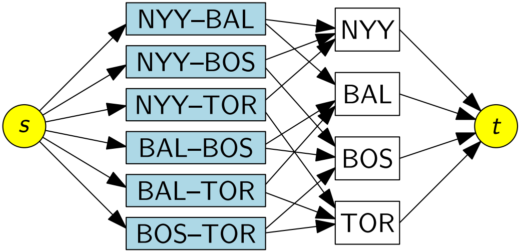


各チームに対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

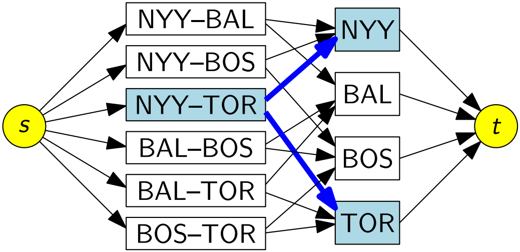


各対戦に対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

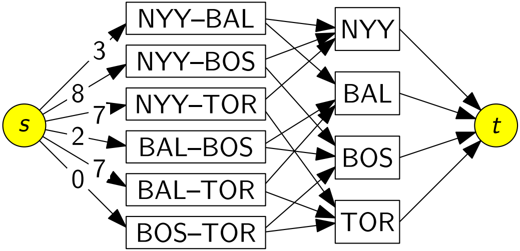


対戦を行うチームに向かって弧を引く

DET の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

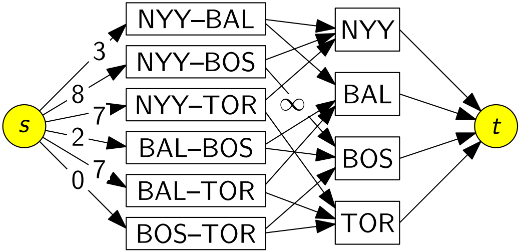


残り対戦数

DET の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

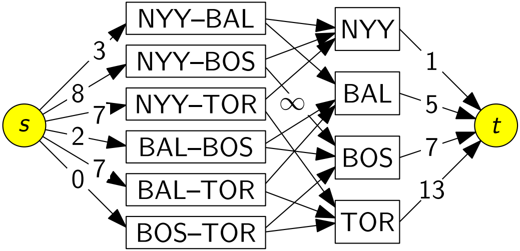


「真ん中」の弧の容量はどれも ∞

DET の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

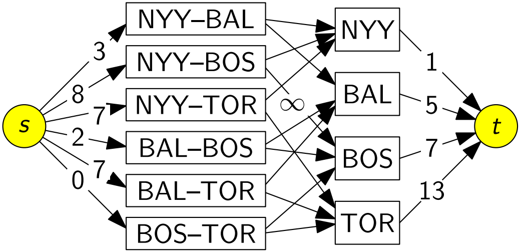


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

DET の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

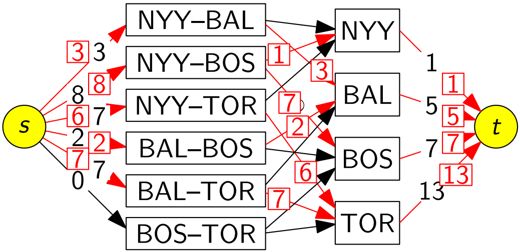


最大流の値が $3 + 8 + 7 + 2 + 7 + 0 = 27 \Leftrightarrow$ DET は優勝可能

DET の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

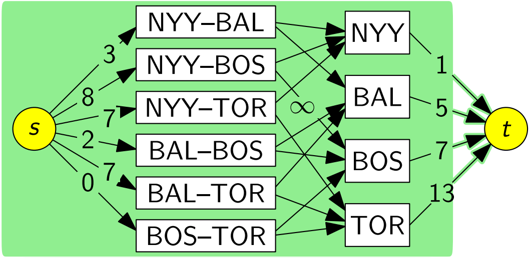


これが最大流で，その値は 26

DET の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

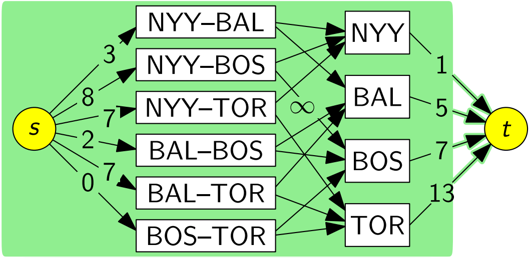


なぜならば，容量が 26 のカットが存在するから

DET の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0



結論：DET は優勝できない

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- 最大流問題を用いた優勝可能性判定
  - Schwartz (1966)
- t 位以上になれるか，の判定は NP 困難 (難しい)
  - McCormick (1999)
- 優勝可能性判定のための高速アルゴリズム
  - Wayne (2001)
  - Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - Gusfield, Martel (2002)

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

(a, b, c)-規則：勝ち a 点，引き分け b 点，負け c 点

(MLB は $(1, 0, 0)$-規則)

- $(2, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ 最大流問題 (1990 年までの FIFA)
  - Schwartz (1966)
- $(3, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ NP 困難 (1990 年以降の FIFA)
  - Kern, Paulusma (2001)
  - Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)
- $a = b$ または $b = c$ または $a + c = 2b$ $\rightsquigarrow$ 最大流問題
  そうでないとき $\rightsquigarrow$ NP 困難
  - Kern, Paulusma (2001)

目次

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

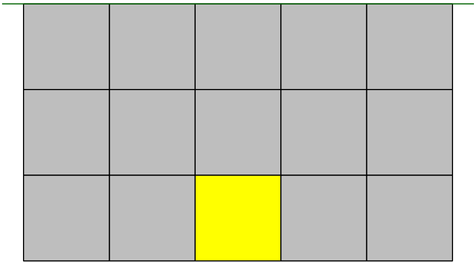
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

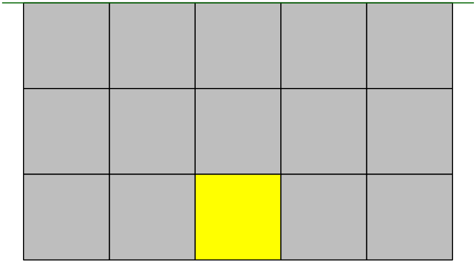
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

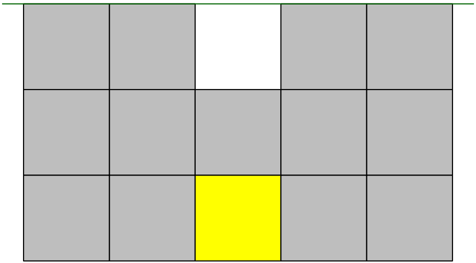
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

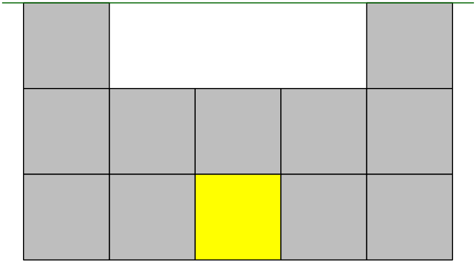
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

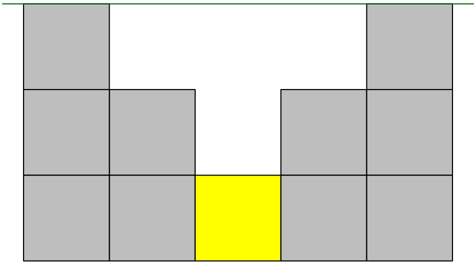
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

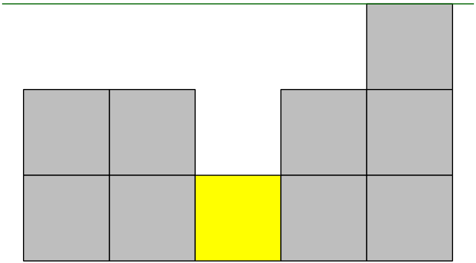
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

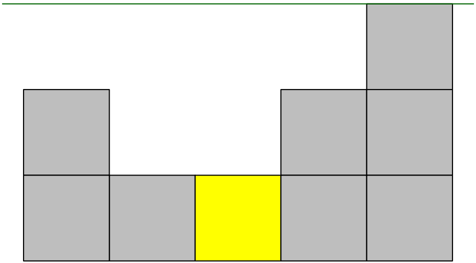
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

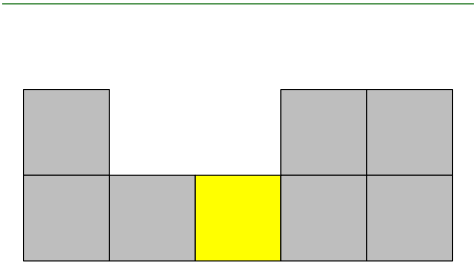
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

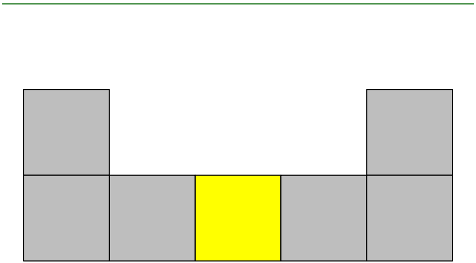
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

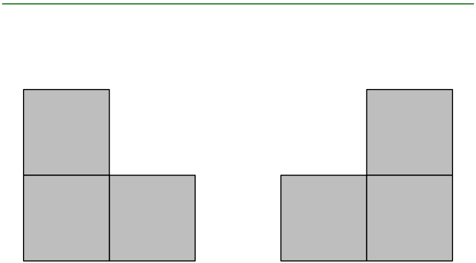
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

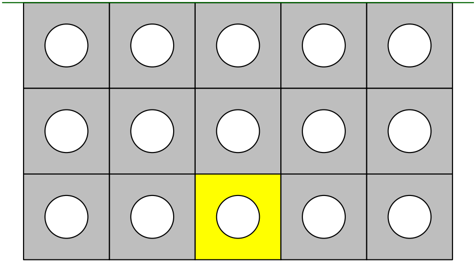
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



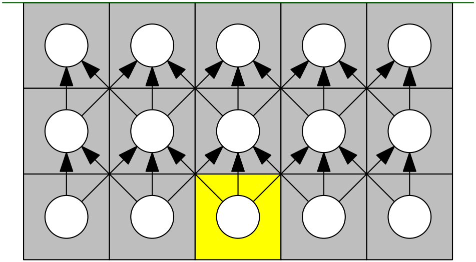
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



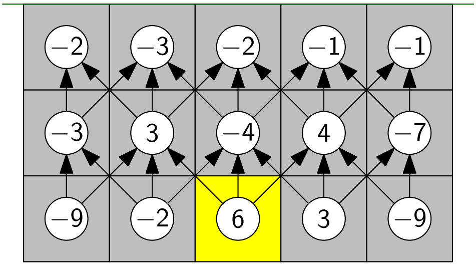
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



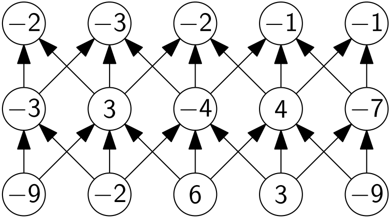
「弧の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を弧で表す

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



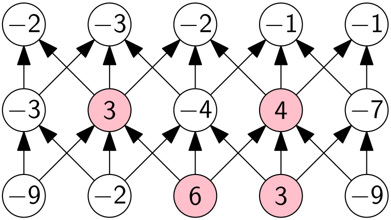
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



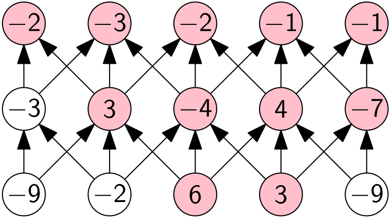
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



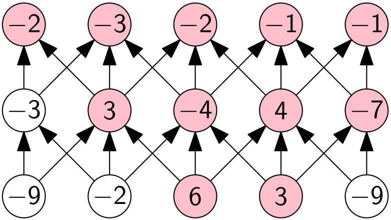
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



これは許される掘り方で，総利益 $= -4$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，最大流問題を使ってモデル化する

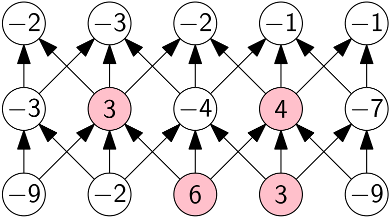
- 実際は，最小 s, t カット問題としてモデル化する

露天掘り問題：モデル化のためのアイディア

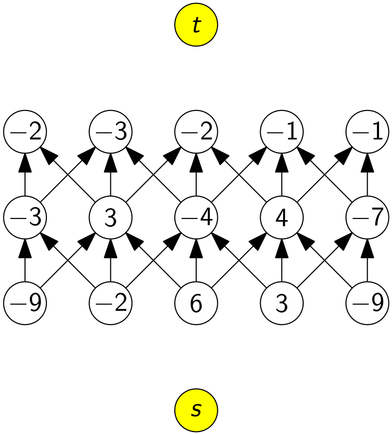
モデル化のためのアイディア

自由に取れるならば，利益の合計を $3+4+6+3=16$ にできる

- -3 を取る $\equiv$ 3 だけ損をする (と考える)
- 6 を取らない $\equiv$ 6 だけ損をする (と考える)
- 目標：損の合計を最小化する

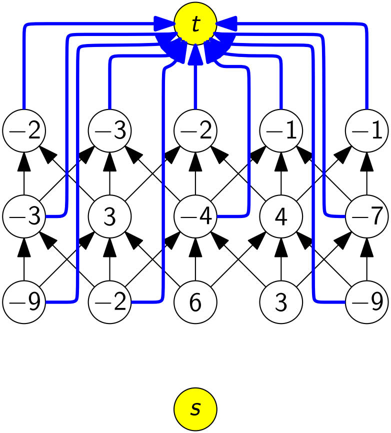


露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (1)



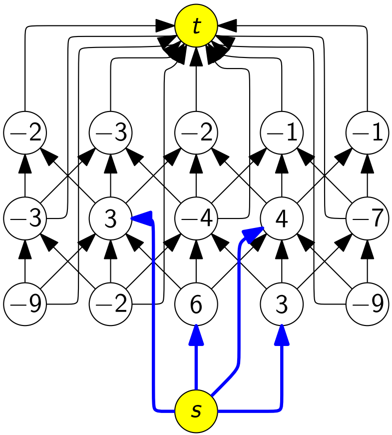
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (2)



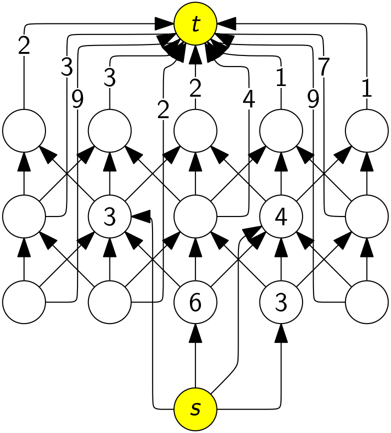
利益が負である頂点から t に向かって弧を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (3)



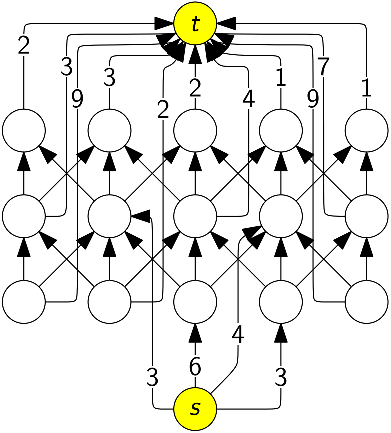
利益が正である頂点に向かって s から弧を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (4)



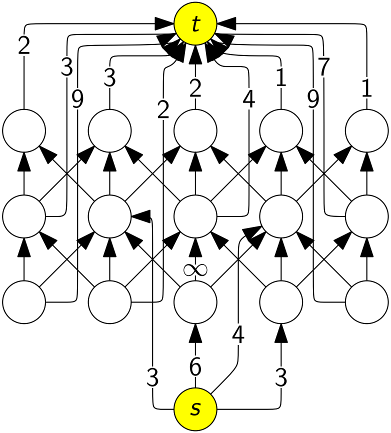
t を終点とする弧の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (5)



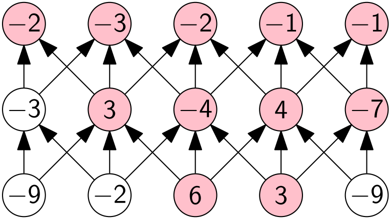
s を始点とする弧の容量はその終点を取らなかったときの損

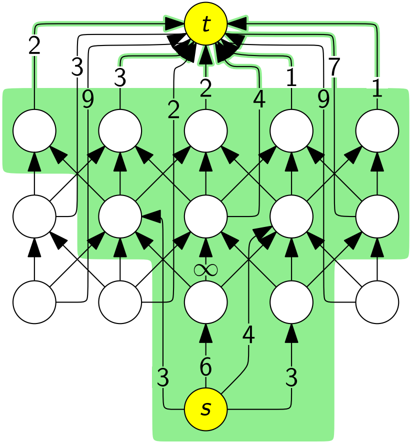
露天掘り問題：最小カットの問題としてのモデル化 (6)



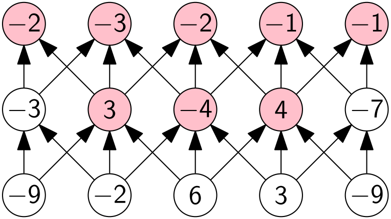
他の弧の容量は ∞ (無限大)

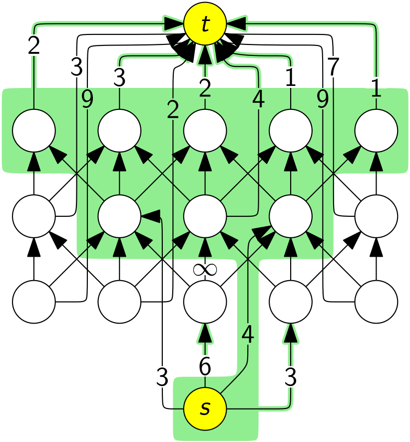
露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (1)



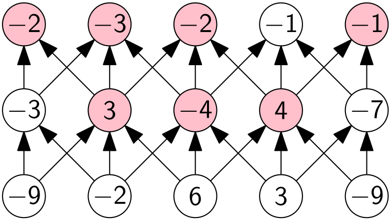


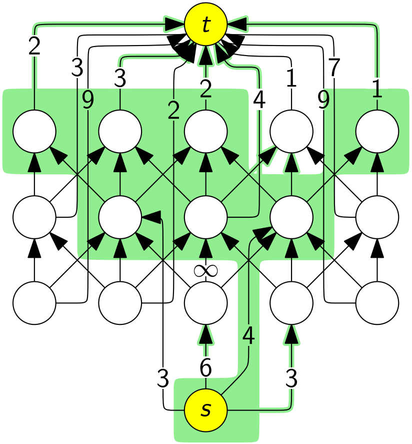
露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (3)



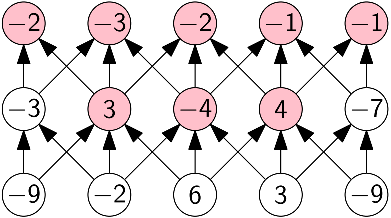


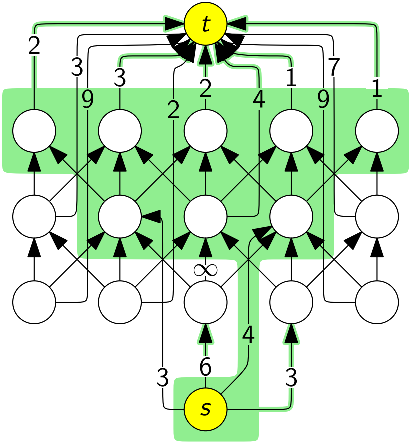
許されない掘り方に対応する s, t カットの容量は無限大

露天掘り問題：ここまでのまとめ

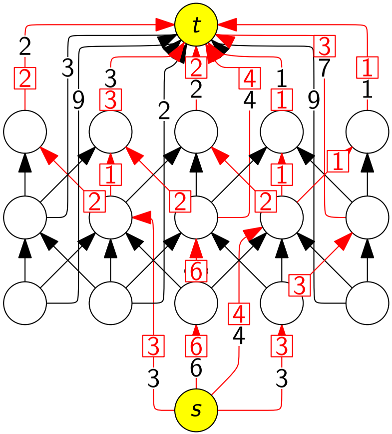
最小 s,t カットから，損が最も小さい掘り方が分かる　(Picard '76)

最小 s,t カットを計算するために，最大流を計算する



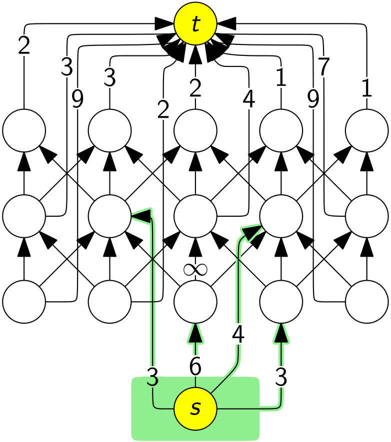


露天掘り問題：最大流



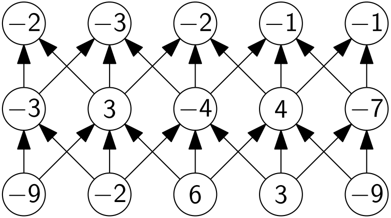
計算された最大流 (値 $= 16$)

露天掘り問題：最小 s, t カット



対応する最小 s, t カット (容量 $= 16$)

露天掘り問題：最小 s,t カットに対応する掘り方



総利益 $= 0$

目次

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題を用いて様々な問題がモデル化できるようになる

- 割当問題
- リーグ戦における優勝可能性判定問題
- 露天掘り問題

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次