# グラフとネットワーク 第 7 回
# 最大流：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 23 日

最終更新：2014 年 5 月 24 日　19:01

## スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. 全域木：数理 (5/2)
5. マッチング：数理 (5/9)
6. マッチング：モデル化 (5/16)
7. 最大流：数理 (5/23)
8. 最大流：モデル化 (1) (5/30)
9. 最大流：モデル化 (2) (6/6)

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

10. 連結性：モデル化 (6/13)
11. 彩色：数理 (6/20)
- 中間試験 (6/27)
- * 休講 (7/4)
12. 彩色：モデル化 (7/11)
13. 平面グラフ：数理 (7/18)
14. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

## この講義の概要 (シラバス掲載内容)

### 主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

### 達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

無向グラフ $G = (V, E)$

**マッチングと頂点被覆の関係 (重要)**

$M$ が $G$ のマッチング
$C$ が $G$ の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

無向グラフ $G = (V, E)$

### マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$ が $G$ のマッチング
$C$ が $G$ の頂点被覆
$\Rightarrow |M| \leq |C|$

### 最大マッチングと頂点被覆の関係

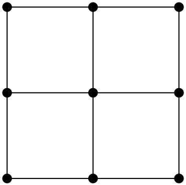
$M$ が $G$ の最大マッチング
$C$ が $G$ の頂点被覆
$\Rightarrow |M| \leq |C|$

### 最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

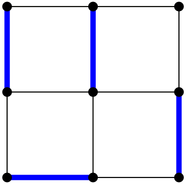
$M$ が $G$ の最大マッチング
$C$ が $G$ の最小頂点被覆
$\Rightarrow |M| \leq |C|$

## 頂点被覆の重要性 (復習)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

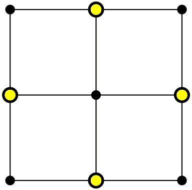


次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



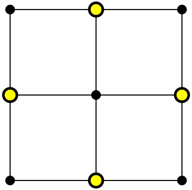
最大マッチングの辺数 $\geq$ 4

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆

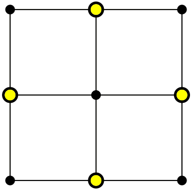
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 4$$

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



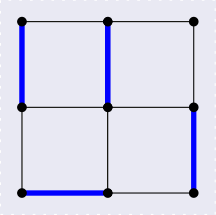
これは頂点被覆なので，

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 4$$

- したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$ である!!!

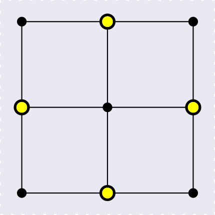
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

**下界**



最大マッチングの辺数 $\geq 4$

**上界**



最大マッチングの辺数 $\leq 4$

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

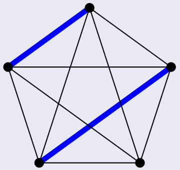
**格言**

頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が保証される

**注意**

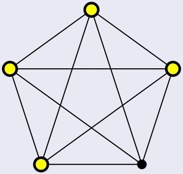
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

**下界**



最大マッチングの辺数 $\geq 2$

**上界**



最大マッチングの辺数 $\leq 4$

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

# 目次

## 概要

### 今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる
- 増加道法にしたがって，最大流を計算できる

### 重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

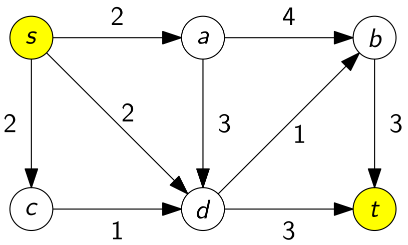
## 目次

## 最大流問題とは？

### 最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$
  (弧の容量は非負実数)

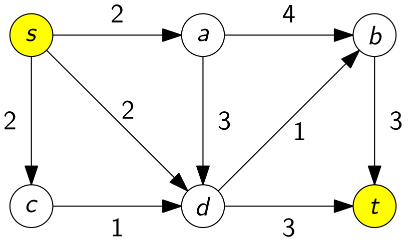


# 最大流問題とは？

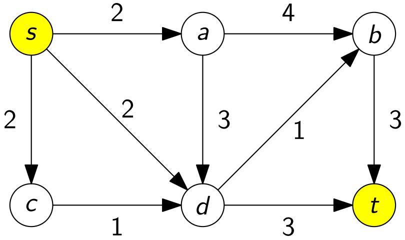
## 最大流問題とは？

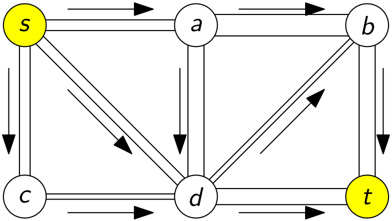
出力

- $s$ から $t$ へ至る流れで，その値が最大のもの
  ($s$ から $t$ へ至る最大流)

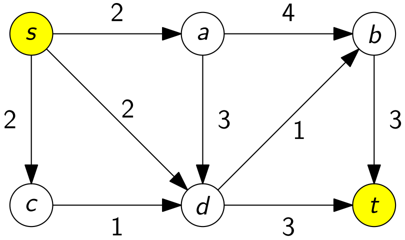


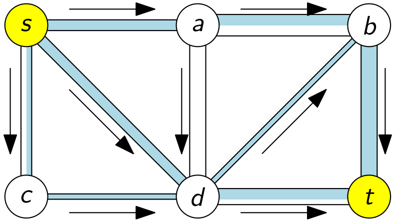
# 流れとは?: 直感 (1)



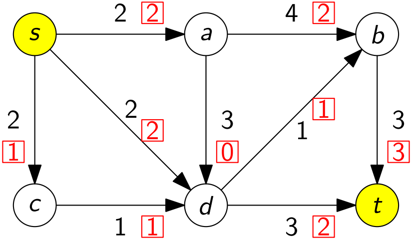



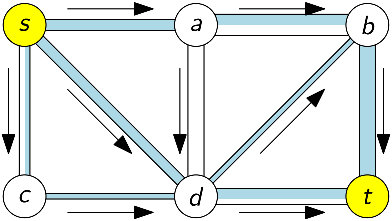
## 流れとは?: 直感 (2)



# 流れとは？: 直感 (3)



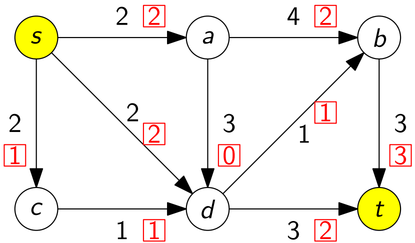
## 流れとは？ (1)

### $s$ から $t$ へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

1. $s, t$ 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，　(流量保存制約)

$$\underbrace{\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))}_{(v\text{ へ流入する総量})} = \underbrace{\sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))}_{(v\text{ から流出する総量})}$$



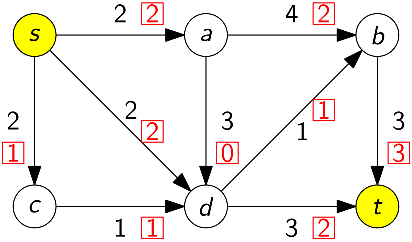
## 流れとは？ (2)

### $s$ から $t$ へ至る流れとは？

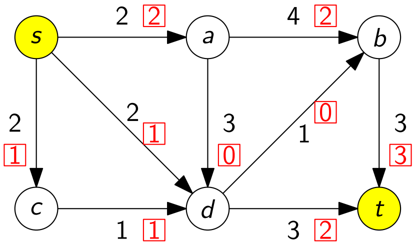
各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において, (容量制約)

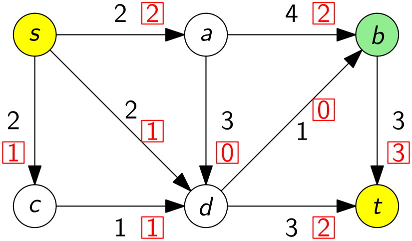
$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$



# これは流れか？ (1)

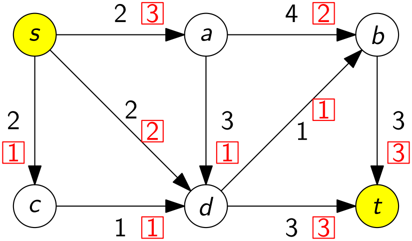


## これは流れか？ (1)

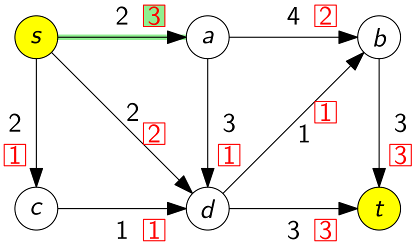



流れではない

## これは流れか？ (2)

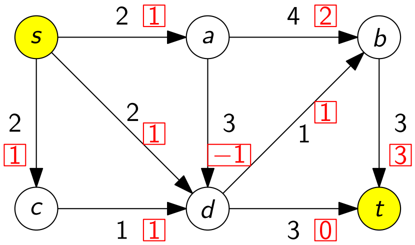


## これは流れか？ (2)

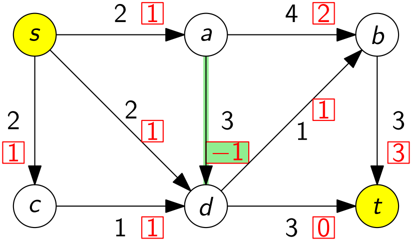



流れではない

# これは流れか？ (3)

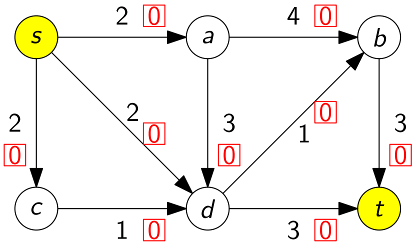


## これは流れか？ (3)

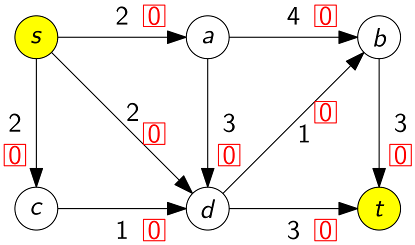



流れではない

## これは流れか？ (4)



## これは流れか？ (4)



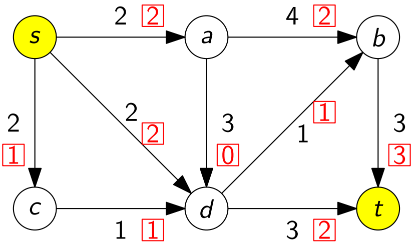

流れである

## 流れの値

### 流れ $f$ の値とは？

$s$ から $t$ へ至る流れ $f$ の値を次の量で定義し，$\mathtt{val}(f)$ と表記する

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

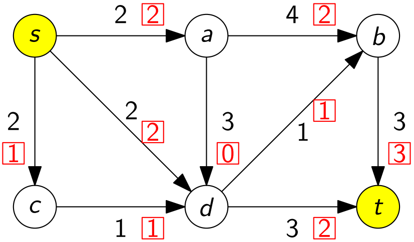



この流れの値は 5

## 最大流

### 最大流とは？

$s$ から $t$ へ至る流れ $f$ が最大流であるとは，
$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f'$ に対して $\texttt{val}(f') \leq \texttt{val}(f)$ が成り立つこと




注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

## 記法の簡略化：流入，流出，純流入，純流出

$s$ から $t$ へ至る流れ $f \colon A \to \mathbb{R}$

### 記法と用語

各頂点 $v \in V$ に対して，次のように記号を定義

- $f^+(v) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$ （$v$ からの流出）
- $f^-(v) = \sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))$ （$v$ への流入）

このとき，

- $f^+(v) - f^-(v)$ は $v$ における**純流出**
- $f^-(v) - f^+(v)$ は $v$ における**純流入**

$f^+(v) - f^-(v)$ を $\partial f(v)$ と書いて，$f$ の $v$ における**境界**と呼ぶことがある

## 記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

$s$ から $t$ へ至る流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$

### つまり，次のように書き換えられる

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

流れ $f$ の値

- $\mathtt{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$

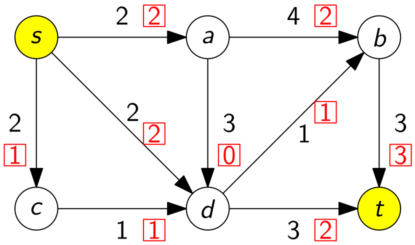
## 流れの総和 ＝ 流出量の総和 ＝ 流入量の総和

$s$ から $t$ へ至る流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$

### 次が成り立つ

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{v\in V} f^+(v) = \sum_{v\in V} f^-(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



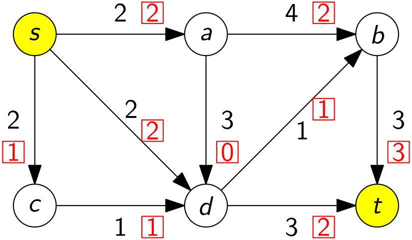

| $v$ | $f^+(v)$ | $f^-(v)$ |
|---|---|---|
| $s$ | 5 | 0 |
| $a$ | 2 | 2 |
| $b$ | 3 | 3 |
| $c$ | 1 | 1 |
| $d$ | 3 | 3 |
| $t$ | 0 | 5 |
| 計 | 14 | 14 |

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入

### 次が成り立つ

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{array}{ccc} f^+(s) - f^-(s) & = & f^-(t) - f^+(t) \\ (s\text{ における純流出}) & & (t\text{ における純流入}) \end{array}$$




左辺 $= 5 =$ 右辺

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

が得られる．

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となる

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となるので，式 (2) − 式 (1) より，

- $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる．

## $s$ における純流出 $=$ $t$ における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となるので，式 (2) − 式 (1) より，

- $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる．整理すると

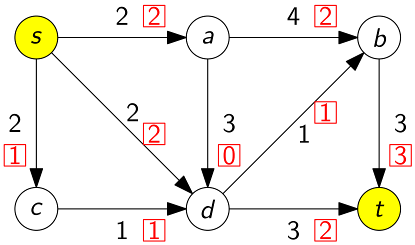
- $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

が得られる． □

## 最大流問題が出てくる場面：配送問題

- 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- $s$ は 部品工場 をモデル化
- $t$ は 組立工場 をモデル化
- 弧の容量は 道幅 をモデル化

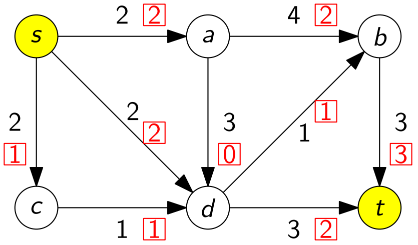
最大流問題 = できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？




他の応用は後の講義で

# 目次

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？




この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

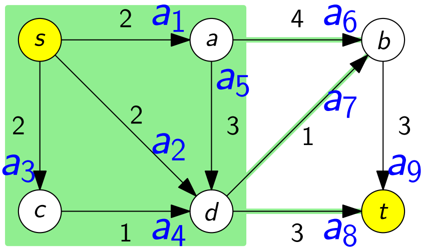
- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい

| 最大化 | 最小化 |
|---|---|
| マッチング | 頂点被覆 |
| 流れ | ??? |

## カット

### $s, t$ カットとは？

$s, t$ カットとは，頂点部分集合 $S$ で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



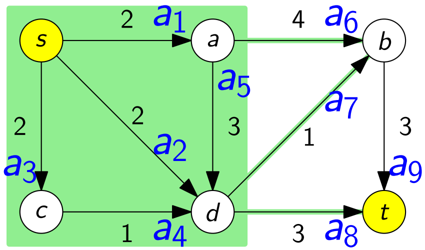

イメージ：$s$ から $t$ へ至る流れは $S$ の側から $V - S$ の側に向かっていく

# カットの容量

## $s,t$ カットの容量とは？

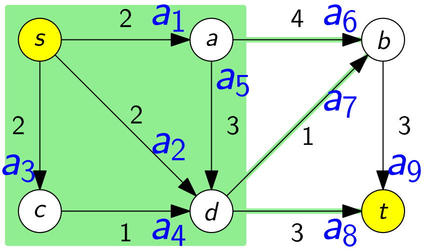
$s,t$ カット $S$ の容量とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v))$$



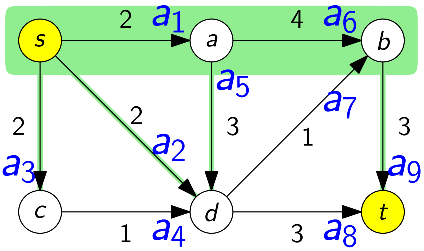

$S$ に始点を持ち，$V-S$ に終点を持つ弧の容量の合計

# カット容量の例 (1)




$\{s, a, c, d\}$ は $s, t$ カットで，その容量は 8

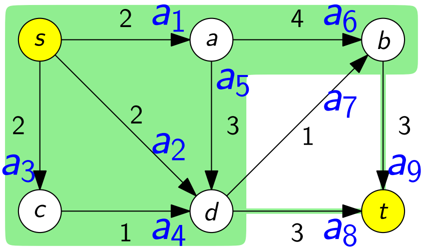
## カット容量の例 (2)




$\{s, a, b\}$ は $s, t$ カットで，その容量は 10

注意：$a_7$ の容量はカットの容量に含めない

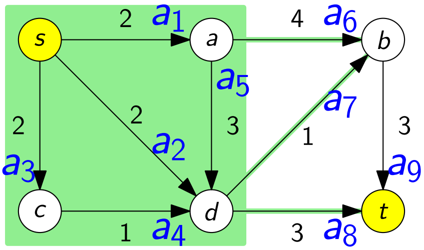
## カット容量の例 (3)




$\{s, a, b, c, d\}$ は $s, t$ カットで，その容量は 6

注意：$a_7$ の容量はカットの容量に含めない

## カットの容量と流れ




直感

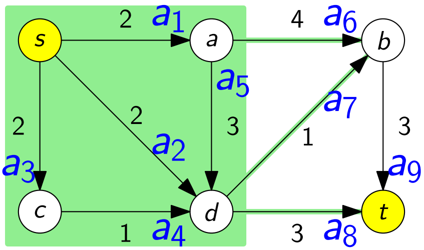
- $s$ から $t$ へ至る流れ $f$ は $S$ から $V - S$ へ向かっていく
- $\therefore$ $\mathtt{cap}(S)$ よりもたくさん $s$ から $t$ へ流れない
- $\therefore$ $\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

## カットの容量と流れ：より厳密に

### 流れとカットの関係

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s, t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$



# カットの容量と流れ：補題

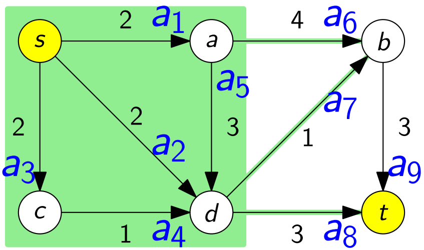
## 補題 A

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s,t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v))$$

($S$ から出る総流量)　($S$ に入る総流量)

証明：演習問題



## カットの容量と流れ：証明

**証明したいこと：流れとカットの関係**

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s,t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) \le \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\mathtt{val}(f) \overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v))$$

## カットの容量と流れ：証明

**証明したいこと：流れとカットの関係**

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s,t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) \qquad \because f((u,v)) \geq 0
\end{aligned}$$

## カットの容量と流れ：証明

### 証明したいこと：流れとカットの関係

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s,t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) && \because f((u,v)) \geq 0 \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) && \because f((u,v)) \leq c((u,v))
\end{aligned}$$

## カットの容量と流れ：証明

**証明したいこと：流れとカットの関係**

$s$ から $t$ へ至る任意の流れ $f$ と任意の $s,t$ カット $S$ に対して

$$\mathtt{val}(f) \le \mathtt{cap}(S)$$

証明：

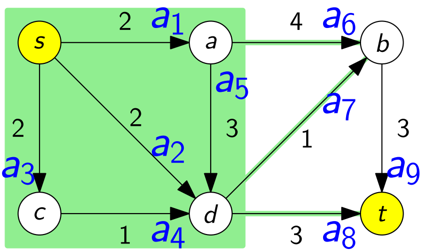
$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\le \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) && \because f((u,v)) \ge 0 \\
&\le \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) && \because f((u,v)) \le c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}$$

□

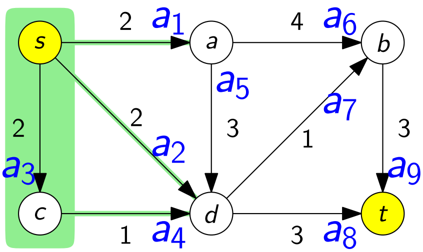
# 最小カット

## 最小 $s, t$ カットとは？

最小 $s, t$ カットとは，$s, t$ カット $S$ で，
任意の $s, t$ カット $S'$ に対して，$\mathrm{cap}(S) \le \mathrm{cap}(S')$ を満たすもの




最小 $s, t$ カットではない




最小 $s, t$ カットである

## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

### 流れとカットの関係 (重要)

$f$ が流れ
$S$ が $s, t$ カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

### 流れとカットの関係 (重要)

$f$ が流れ
$S$ が $s, t$ カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

### 最大流とカットの関係

$f$ が最大流
$S$ が $s, t$ カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

### 流れとカットの関係 (重要)

$f$ が流れ
$S$ が $s, t$ カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

### 最大流とカットの関係

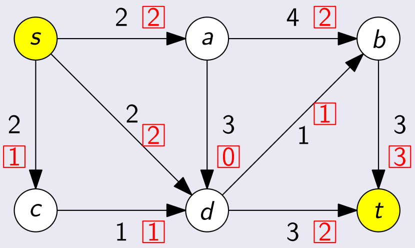
$f$ が最大流
$S$ が $s, t$ カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

### 最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

$f$ が最大流
$S$ が最小 $s, t$ カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

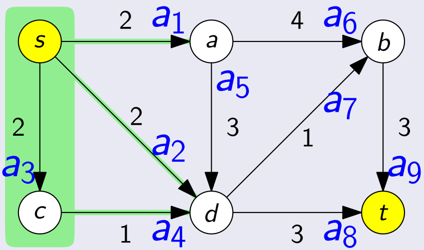
# 弱双対性の使い方

## 下界




最大流の値 $\geq 5$

## 上界

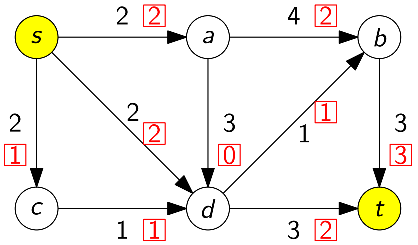



最大流の値 $\leq 5$

## したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある $s, t$ カットは最小 $s, t$ カットであり，その容量は 5

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



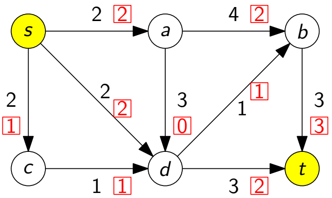

この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ⇝ それは $s, t$ カット !!!

| 最大化 | 最小化 |
|---|---|
| マッチング | 頂点被覆 |
| 流れ | $s, t$ カット |

# 目次

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



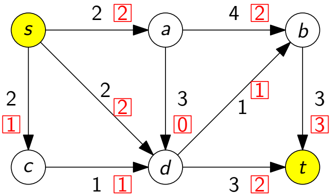

この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- $\rightsquigarrow$ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- $\rightsquigarrow$ それは $s, t$ カット !!!

**問題点？**

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる $f$ と $S$ が存在しないかもしれない？

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)




この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ⇝ それは $s, t$ カット !!!

**問題点？**

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる $f$ と $S$ が存在しないかもしれない？

**解決 ⇝ (最大流最小カット定理)**

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる $f$ と $S$ が必ず存在する !!

## 最大流最小カット定理

### 最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

$f$ が最大流
$S$ が最小 $s, t$ カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

### 注意

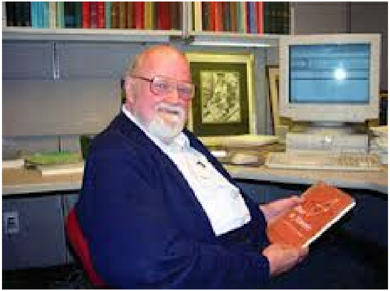
弱双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば $f$ は最大流

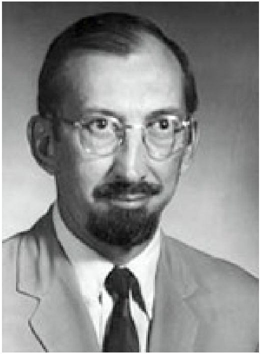
強双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる $f, S$ が必ず存在

## Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.
フォード
(1927–)



D. R. Fulkerson
ファルカーソン
(1924–1976)

http://optientselma.blogspot.jp/2012/09/biografia-lrford-y-dr-fulkerson.html

## 最大流最小カット定理 — 証明に向けて

**最大流最小カット定理 (強双対性)** (Ford, Fulkerson '56)

$f$ が最大流
$S$ が最小 $s,t$ カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

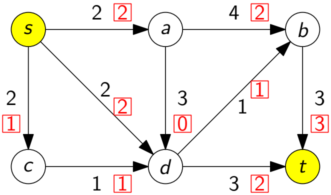
この講義では容量が整数の場合のみ証明する

- 容量が無理数の場合の証明は，この講義の範囲を超える (最後に補足)

証明法：アルゴリズムによる証明

## 最大流問題の解き方

1. 線形計画問題として定式化し，線形計画法のアルゴリズムを使う
   (『数理計画法』で学ぶ)
2. 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する
   (特に，増加道法を紹介する)

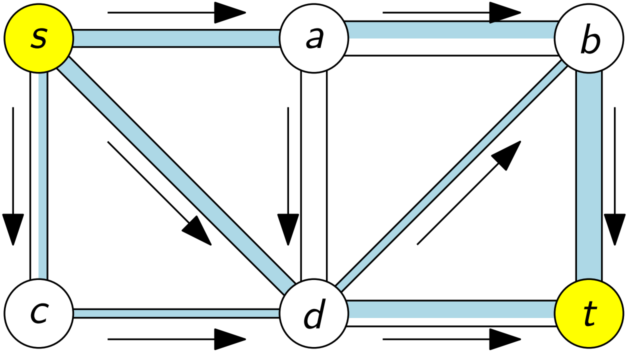



### 今からやること

増加道法を説明する

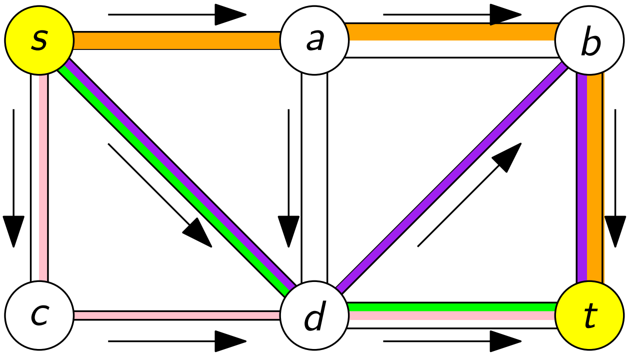
- 重要概念：補助ネットワーク，増加道

## 増加道法：基本アイディア




- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

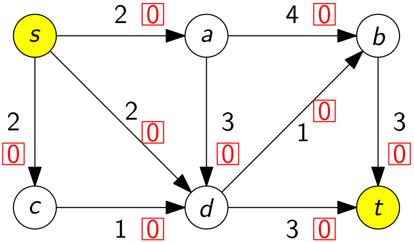
## 増加道法：基本アイディア




- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

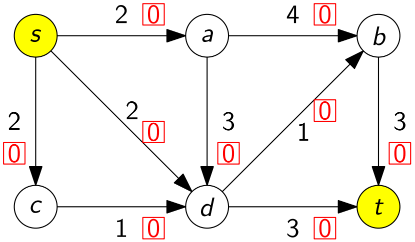
## 増加道法の動き (1)

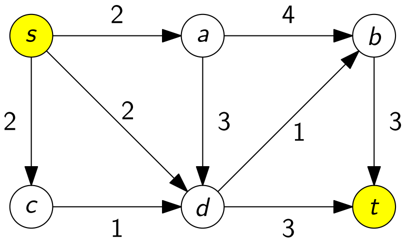
任意の流れから始める (例えば，どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)



# 増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)

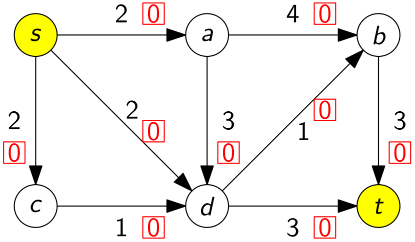


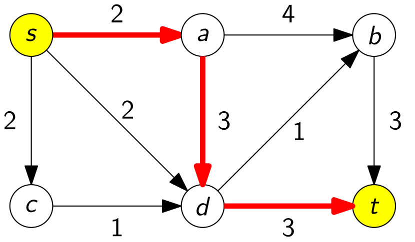




この場合は，始めのグラフと同じ
(次から変わるので，定義はそこで説明)

## 増加道法の動き (1)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，$s$ を始点，$t$ を終点とする道を見つける

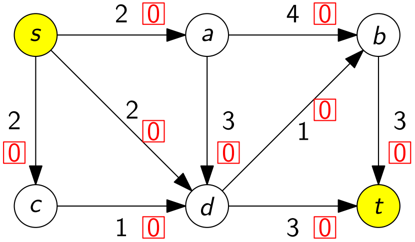


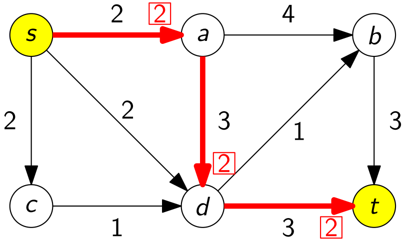




このような道を増加道 (ぞうかどう) と呼ぶ

## 増加道法の動き (1)：流れの増加

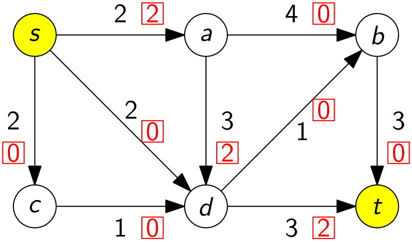
道に沿って，できる限り流れを増加させる





## 増加道法の動き (2)

現在得られている流れ

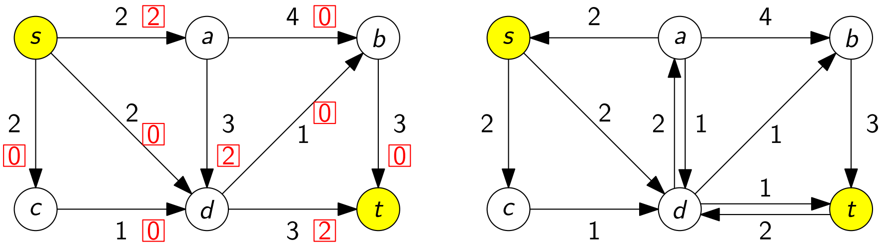



先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

# 増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る




## 補助ネットワークとは？

- 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- 2 頂点間に弧がある ⇔ その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- 弧の容量 ＝ 流せる最大量

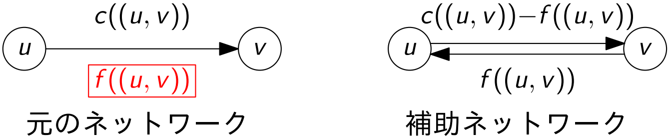
## 補助ネットワーク：定義

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t$

### 流れ $f$ に対する補助ネットワークとは？

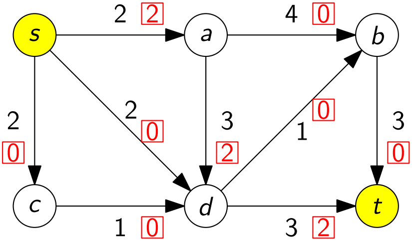
流れ $f$ に対する**補助ネットワーク**は次で定義される

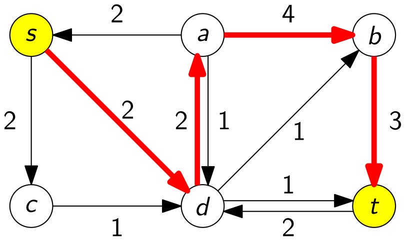
- 有向グラフ $G_f = (V, A_f)$，$A_f = A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}}$
  - $A_f^{\mathrm{F}} = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$
  - $A_f^{\mathrm{B}} = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$
- 容量 $c_f\colon A_f \to \mathbb{R}$
  - $(u, v) \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
  - $(v, u) \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$c_f((v, u)) = f((u, v))$



## 増加道法の動き (2)：増加道の発見

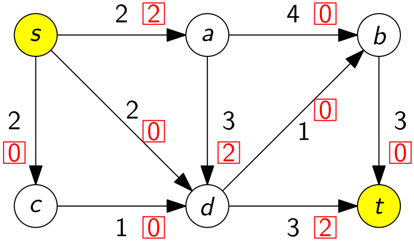
補助ネットワークにおいて，$s$ を始点，$t$ を終点とする道を見つける

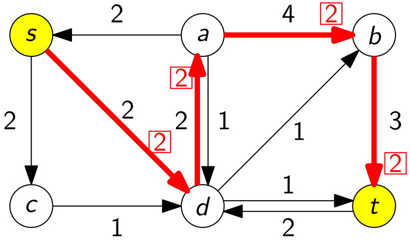


## 増加道法の動き (2)：流れの増加

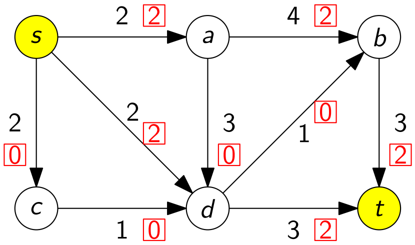
道に沿って，できる限り流れを増加させる



# 増加道法の動き (3)

現在得られている流れ

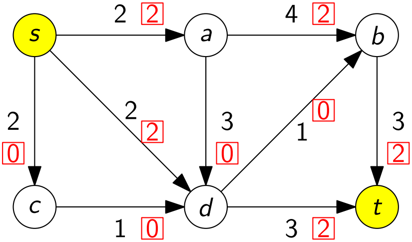


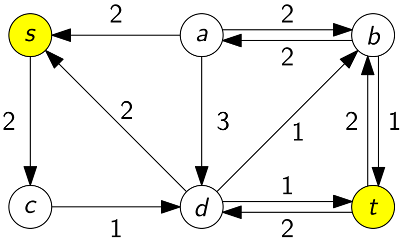

先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

# 増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

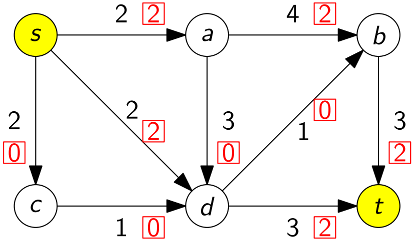
補助ネットワークを作る

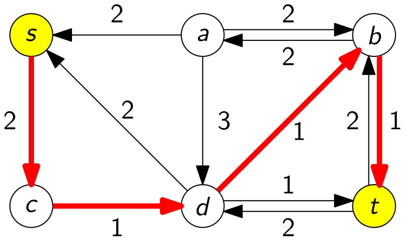


# 増加道法の動き (3)：増加道の発見

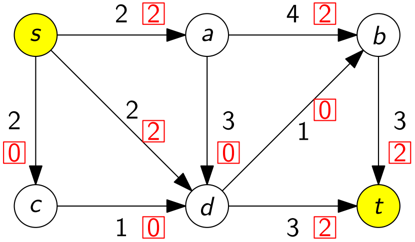
補助ネットワークにおいて，$s$ を始点，$t$ を終点とする道を見つける

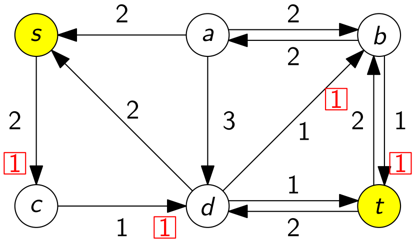


## 増加道法の動き (3)：流れの増加

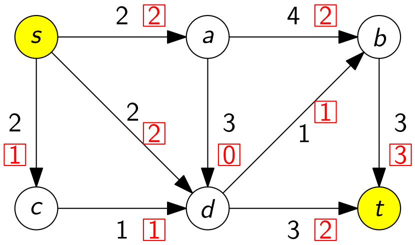
道に沿って，できる限り流れを増加させる



## 増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

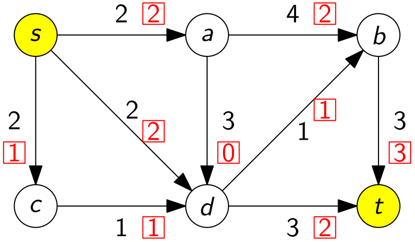


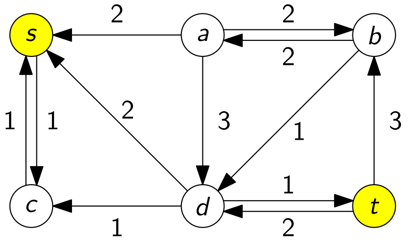

先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

## 増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

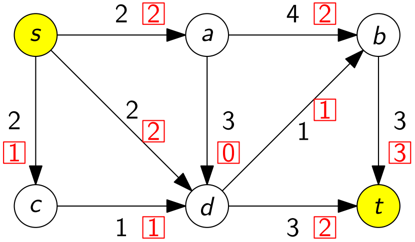
補助ネットワークを作る

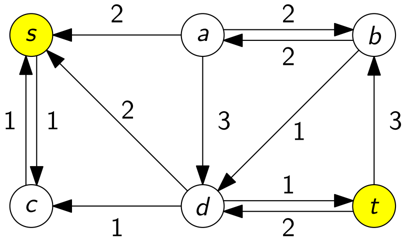


## 増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，$s$ を始点，$t$ を終点とする道を見つける

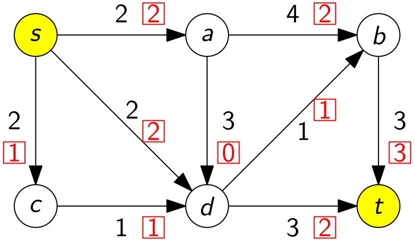


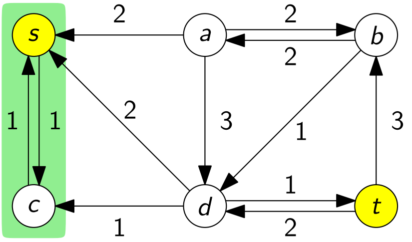




しかし，見つからない！ (存在しない) $\rightsquigarrow$ アルゴリズムは次の段階へ

## 増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

補助ネットワークにおいて，$s$ から到達可能な頂点をすべて見つける



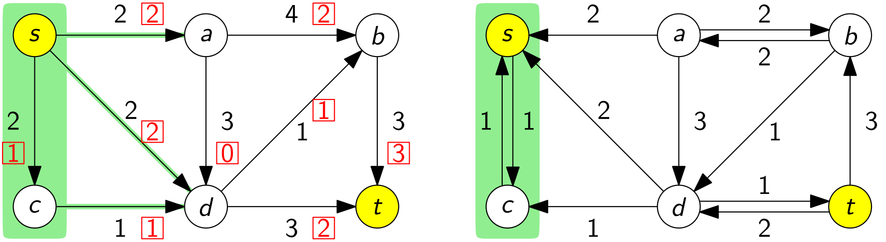




$$S = \left\{ v \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて，} s \text{ を始点として，} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ この $S$ は $s, t$ カットである (なぜか？)

## 増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて，この $s, t$ カットの容量を見る




⇝ この容量は得られた流れの値に等しい

- つまり，最大流と最小 $s, t$ カットが得られた！ (アルゴリズム停止)

## 増加道法：動きのまとめ

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t$

**アルゴリズム：増加道法**

初期化：流れ $f := 0$

1. $f$ に対する補助ネットワーク ($G_f$ と $c_f$) を作る
2. $G_f$ において $s$ を始点，$t$ を終点とする道を見つける
3. 存在するとき，その道に沿って流れを増加．1 に戻る
4. 存在しないとき，$f$ を出力

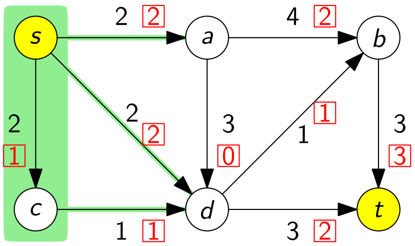
今から証明すること

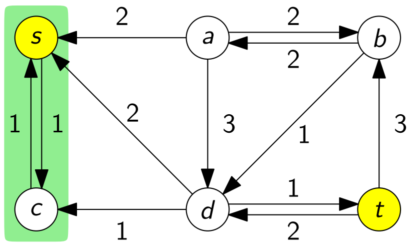
- 増加道法が停止したとき，最大流を出力すること (正当性)
- 増加道法が必ず停止すること (停止性)

注：とりあえず，アルゴリズムの「効率性」は無視

## 増加道法の正当性：例

なぜ，これが最大流なのか？





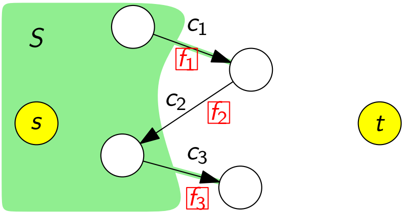

- 補助ネットワークにおいて，$S$ から出ていく弧は存在しない
- $S$ から出る総流量 $= 5$ なので，$\mathtt{val}(f) \geq 5$
- 一方で，$\mathtt{cap}(S) = 5$．つまり，$\mathtt{val}(f) \leq 5$
- $\therefore \mathtt{val}(f) = 5$ であり，$\mathtt{cap}(S) = 5$

## 増加道法の正当性：証明 (1)

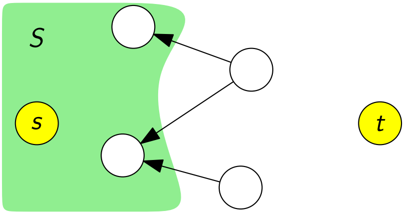
**増加道法の正当性**

増加道法が停止したとき，その出力 $f$ は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える




元のネットワーク




補助ネットワーク

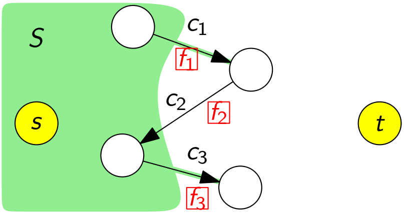
## 増加道法の正当性：証明 (1)

**増加道法の正当性**

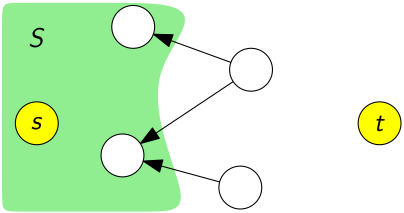
増加道法が停止したとき，その出力 $f$ は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 $f$ に対する補助ネットワークにおいて，$s$ から到達可能な頂点全体の集合を $S$ とする




元のネットワーク




補助ネットワーク

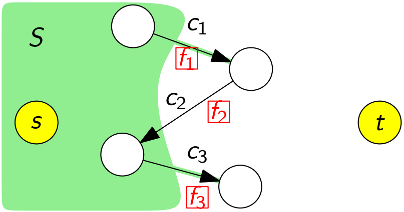
## 増加道法の正当性：証明 (1)

**増加道法の正当性**

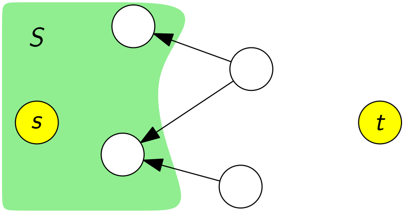
増加道法が停止したとき，その出力 $f$ は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 $f$ に対する補助ネットワークにおいて，$s$ から到達可能な頂点全体の集合を $S$ とする
- $S$ は $s, t$ カットである (なぜか？)




元のネットワーク




補助ネットワーク

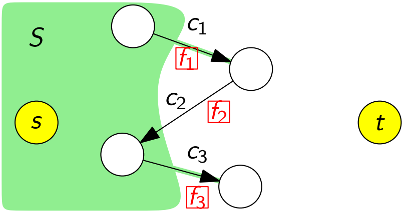
## 増加道法の正当性：証明 (1)

**増加道法の正当性**

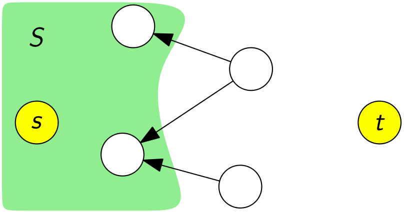
増加道法が停止したとき，その出力 $f$ は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 $f$ に対する補助ネットワークにおいて，$s$ から到達可能な頂点全体の集合を $S$ とする
- $S$ は $s, t$ カットである (なぜか？)
- つまり，補助ネットワークの弧 $(u, v) \in A_f$ で $u \in S$ かつ $v \notin S$ となるものは存在しない




元のネットワーク

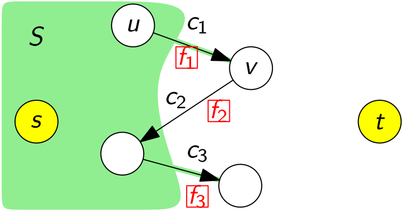



補助ネットワーク

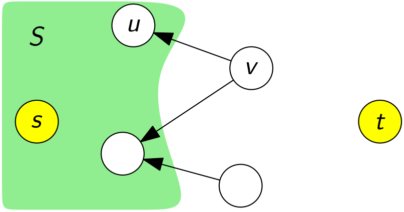
## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u,v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- $(u,v) \notin A_f$ であるので，特に $(u,v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u,v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u,v)) = c((u,v))$



元のネットワーク

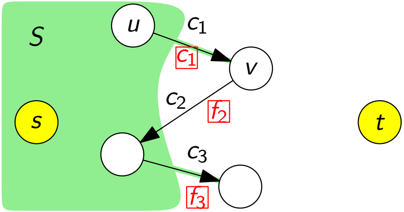


補助ネットワーク

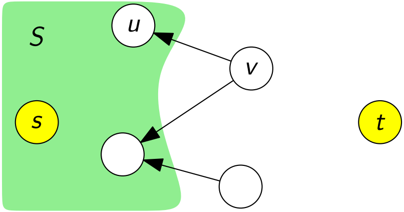
## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- $(u, v) \notin A_f$ であるので，特に $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u, v)) = c((u, v))$




元のネットワーク

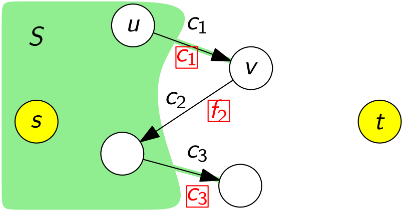



補助ネットワーク

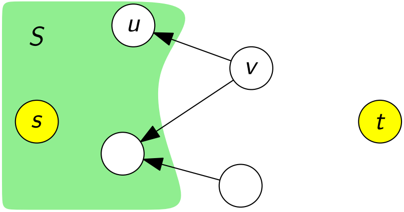
## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u,v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- $(u,v) \notin A_f$ であるので，特に $(u,v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u,v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u,v)) = c((u,v))$




元のネットワーク

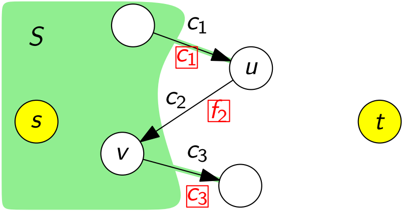



補助ネットワーク

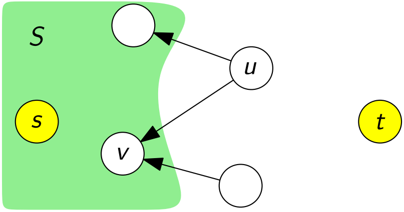
## 増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- $(v, u) \notin A_f$ であるので，特に $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$
- $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$ より，$f((u, v)) = 0$




元のネットワーク

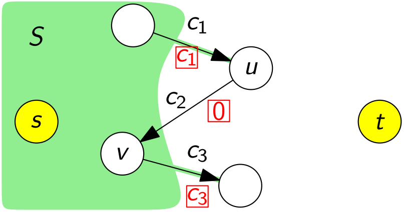



補助ネットワーク

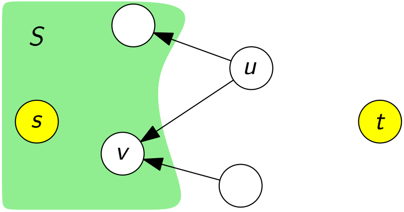
## 増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- $(v, u) \notin A_f$ であるので，特に $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$
- $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$ より，$f((u, v)) = 0$




元のネットワーク




補助ネットワーク

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\mathtt{val}(f) \overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v))$$

### 補足

この $S$ は最小 $s, t$ カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\stackrel{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} 0
\end{aligned}
$$

**補足**

この $S$ は最小 $s,t$ カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v))
\end{aligned}
$$

**補足**

この $S$ は最小 $s, t$ カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}$$

**補足**

この $S$ は最小 $s,t$ カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A, u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}$$

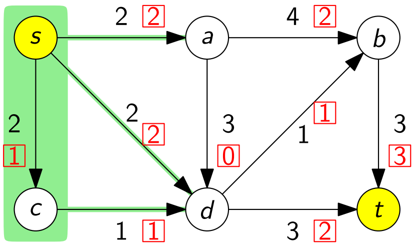
つまり，$\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となり，弱双対性より，$f$ は最大流である □

**補足**

この $S$ は最小 $s,t$ カットである

## 増加道法の停止性：略証

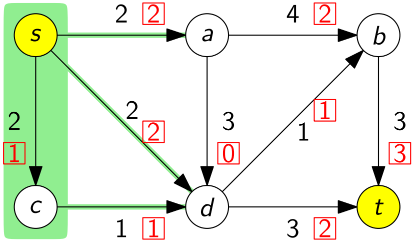
なぜ増加道法は停止するのか？

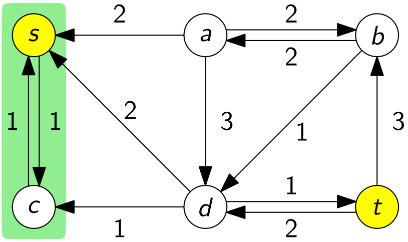



- 容量は整数なので，最小 $s, t$ カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数

## 増加道法の停止性：略証

なぜ増加道法は停止するのか？

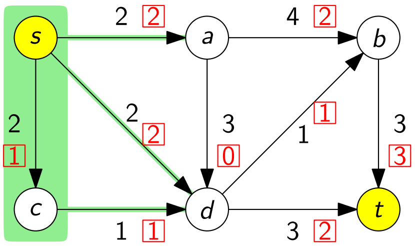


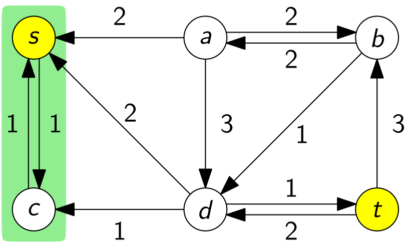




- 容量は整数なので，最小 $s,t$ カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ∴ 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える

## 増加道法の停止性：略証

なぜ増加道法は停止するのか？

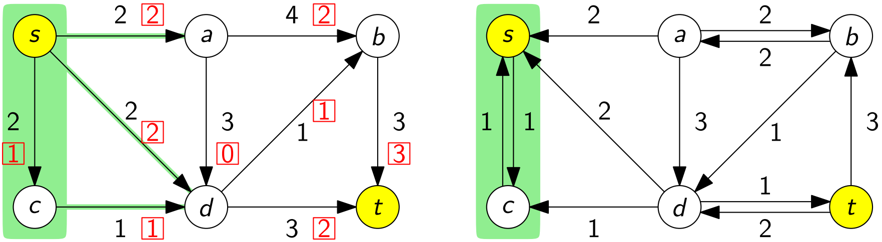



- 容量は整数なので，最小 $s, t$ カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ∴ 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える
- ∴ 反復回数は高々最小 $s, t$ カットの容量で，これは有限 □

# 整数流定理

- つまり，容量が整数であるならば，出力される最大流も整数




## 整数流定理 (重要)

容量が整数 $\Rightarrow$ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

## 増加道法に対する注意

### 注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき，

- 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- その 2 つが同時に起こることもある

### 注意 2

増加道法における，増加道の選び方は工夫できる

- 工夫しない　(Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- 幅優先探索を用いる　(Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

## 目次

# 今日のまとめ

## 今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる
- 増加道法にしたがって，最大流を計算できる

## 重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

## 次回予告

最大流を用いた数理モデル化

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

## 目次