グラフとネットワーク 第 6 回
マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 16 日

最終更新：2014 年 5 月 30 日　10:04

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. 全域木：数理 (5/2)
5. マッチング：数理 (5/9)
6. マッチング：モデル化 (5/16)
7. 最大流：数理 (5/23)
8. 最大流：モデル化 (1) (5/30)
9. 最大流：モデル化 (2) (6/6)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

10. 連結性：モデル化 (6/13)
11. 彩色：数理 (6/20)
- 中間試験 (6/27)
* 休講 (7/4)
12. 彩色：モデル化 (7/11)
13. 平面グラフ：数理 (7/18)
14. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

格言

- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

目次

今日の目標

最大重みマッチングを使って問題を解決する例を見る

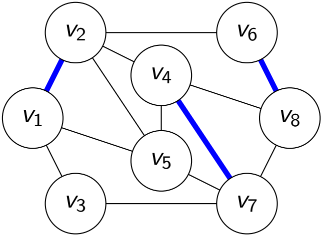
- 完了時刻和最小化スケジューリング
- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)

グラフにおけるマッチング

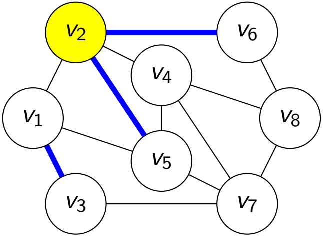
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

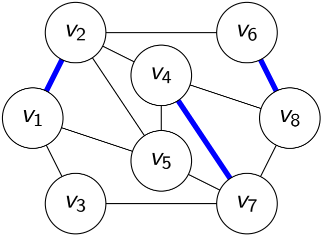
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

最大マッチング

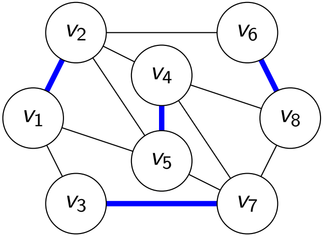
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



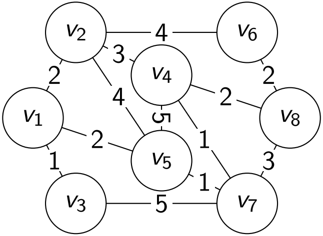
最大マッチングである

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



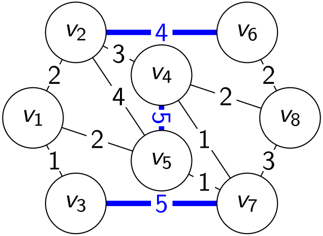
以後, $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



以後，$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

完全グラフにおける最大重みマッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

次は正しい

G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

証明：w に関する G の最大重みマッチングの中で，
辺数が最大のものを M とする　(最大性論法)

- このとき，M が G の最大マッチングであることを証明する
- [背理法]： M が G の最大マッチングではないと仮定する
- G には M に関する増加道が存在する

完全グラフにおける最大重みマッチング (続 1)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

次は正しい

G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

証明 (続き)

- その増加道の端点を $u, v \in V$ とすると，$\{u, v\} \notin M$
- G は完全グラフなので，$\tilde{M} = M \cup \{\{u, v\}\}$ も G のマッチングである
- さらに，$w(\tilde{M}) = w(M) + w(\{u, v\}) \geq w(M)$
- M は w に関する G の最大重みマッチングなので，G の任意のマッチング M' に対して，

$$w(M') \leq w(M) \leq w(\tilde{M})$$

完全グラフにおける最大重みマッチング (続 2)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

次は正しい

G のある最大マッチングは
w に関する G の最大重みマッチングである

証明 (続き)

- すなわち，$\tilde{M}$ も w に関する G の最大重みマッチング
- しかし，$|\tilde{M}| = |M| + 1 > |M|$ なので，
  M が w に関する G の最大重みマッチングの中で
  辺数が最大のものであったことに矛盾 $\square$

完全グラフにおける最大重みマッチング：注意

次は正しい

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G の任意の最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$ に対して
w に関する G の任意の最大重みマッチングは G の最大マッチングである

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの

事実

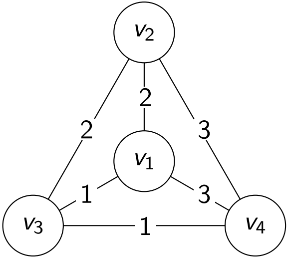
最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる　(Edmonds, '65)

- Edmonds のアルゴリズムは，増加道を見つける手続きをサブルーチンとして用いている

効率よく $=$ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$



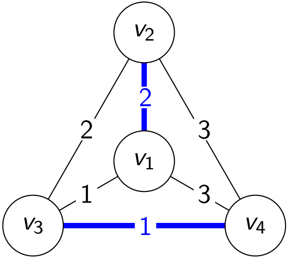
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$



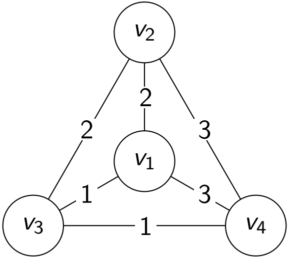
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

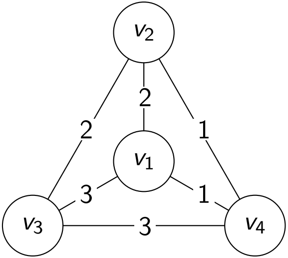
完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$





辺重み：$w(e)$

$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$

演習問題

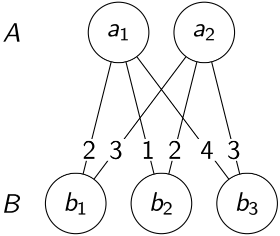
任意の辺 $e \in E$ に対して，$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$ としたとき

M が w に関する G の最小重み完全マッチングである $\Leftrightarrow$
M が w' に関する G の最大重みマッチングである

つまり，最小重み完全マッチングを見つけるためには，
最大重みマッチング問題が解ければよい (帰着)

完全二部グラフの最小重み最大マッチング

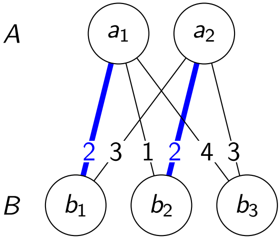
完全二部グラフ $G = (V, E)$
$V = A \cup B$，任意の辺は A と B の頂点を結ぶ，$|A| \leq |B|$
非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$



A の頂点をすべて飽和するマッチングの中で，重みが最小のものを見つけたい

完全二部グラフの最小重み最大マッチング

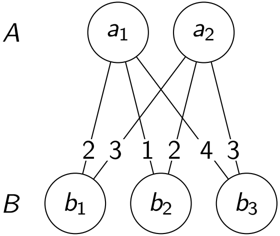
完全二部グラフ $G = (V, E)$
$V = A \cup B$，任意の辺は A と B の頂点を結ぶ，$|A| \leq |B|$
非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

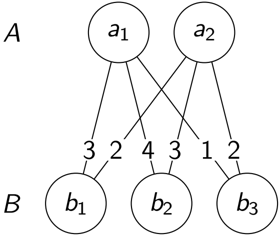


A の頂点をすべて飽和するマッチングの中で，重みが最小のものを見つけたい

完全二部グラフの最小重み最大マッチング

完全二部グラフ $G = (V, E)$
$V = A \cup B$，任意の辺は A と B の頂点を結ぶ，$|A| \leq |B|$
非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$





辺重み：$w(e)$

$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$

完全二部グラフの最小重み最大マッチング：帰着

完全二部グラフ $G = (V, E)$
$V = A \cup B$，任意の辺は A と B の頂点を結ぶ，$|A| \leq |B|$
非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$

演習問題

任意の辺 $e \in E$ に対して，$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$ としたとき

M が A の頂点をすべてを飽和する G のマッチングの中で，
w に関する重み最小のもの
$\Leftrightarrow$ M が w' に関する G の最大重みマッチング

概要

今日の目標

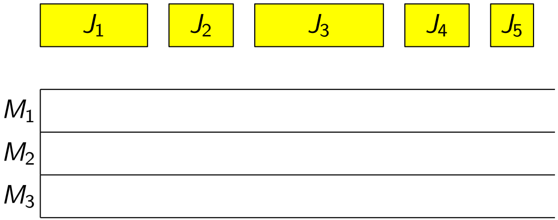
最大重みマッチングを使って問題を解決する例を見る

- 完了時刻和最小化スケジューリング
  $\rightsquigarrow$ 完全二部グラフにおける最小重み最大マッチング
- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)
  $\rightsquigarrow$ 完全グラフにおける最小重み完全マッチング

目次

ジョブスケジューリング

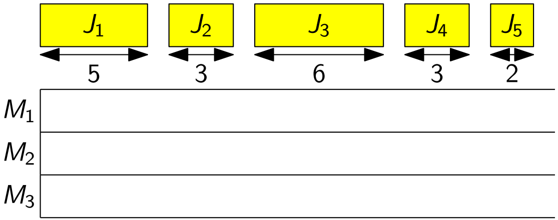
m 個の同一な機械 $M_1, \ldots, M_m$，n 個のジョブ $J_1, \ldots, J_n$，
各ジョブ J_i の処理時間 p_i



行うこと：すべてのジョブを機械で処理する

ジョブスケジューリング

m 個の同一な機械 $M_1, \ldots, M_m$，n 個のジョブ $J_1, \ldots, J_n$，
各ジョブ J_i の処理時間 p_i



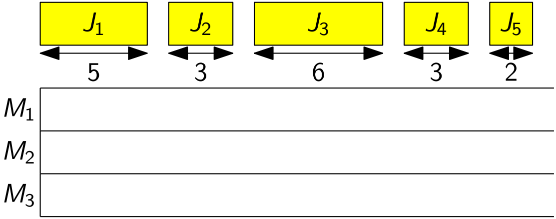
行うこと：すべてのジョブを機械で処理する

$$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$$

ジョブスケジューリング

決めること (スケジューリング，scheduling)

- 各ジョブをどの機械に割り当てるか？
- 各機械で，割り当てられたジョブをどの順に処理するか？



ジョブの中断はないものとする (non-preemptive scheduling)

完了時刻和最小化スケジューリング

目的：各ジョブに着目して，ジョブの完了時刻の和を最小化

このスケジュールにおける完了時刻和 $= 5 + 7 + 3 + 6 + 6 = 27$

完了時刻和最小化スケジューリング

目的：各ジョブに着目して，ジョブの完了時刻の和を最小化

このスケジュールにおける完了時刻和 $= 5 + 7 + 3 + 6 + 6 = 27$

完了時刻和最小化スケジューリング

目的：各ジョブに着目して，ジョブの完了時刻の和を最小化

このスケジュールにおける完了時刻和 $= 2 + 7 + 3 + 6 + 6 = 24$

完了時刻和最小化スケジューリング

今からやること

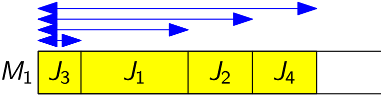
完了時刻和最小化スケジューリング問題を
最大重みマッチング問題としてモデル化する

完了時刻和最小化スケジューリング問題の定義

- 入力：ジョブ数 n，機械数 m，各ジョブ J_i の処理時間 p_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$
- 出力：完了時刻和を最小とするスケジュール

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (予備考察)

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$



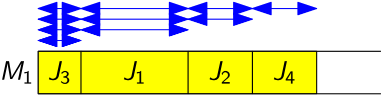
考え方

ジョブを機械に割り当てたとき，
後ろから k 番目にあるジョブの処理時間に k をかけて足している

「完全二部グラフにおけるマッチング」を「場所への割り当て」とみなす

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (予備考察)

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$



完了時刻和 $= 4p_3 + 3p_1 + 2p_2 + p_4$

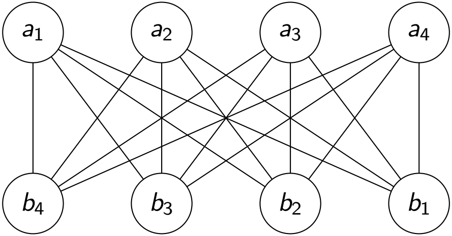
考え方

ジョブを機械に割り当てたとき，
後ろから k 番目にあるジョブの処理時間に k をかけて足している

「完全二部グラフにおけるマッチング」を「場所への割り当て」とみなす

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

次に説明する完全二部グラフ G と非負辺重み関数 w を考える



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

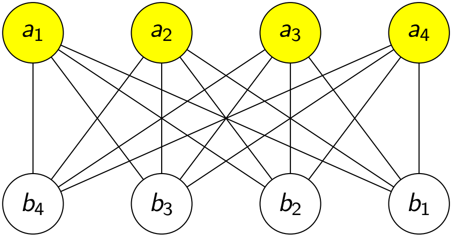
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

頂点 a_i はジョブ J_i を表す



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

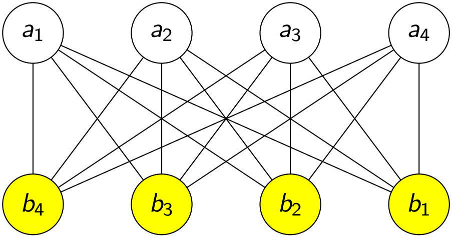
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

頂点 b_k は機械における後ろから k 番目の場所を表す



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

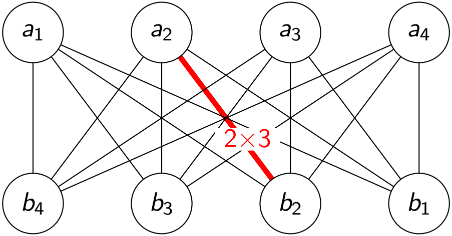
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

辺 $\{a_i, b_k\}$ はジョブ J_i を機械の後ろから k 番目の場所に置くことを表す



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

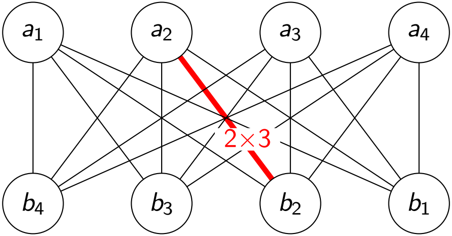
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

辺 $\{a_i, b_k\}$ の重みは $k \cdot p_i$ である



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

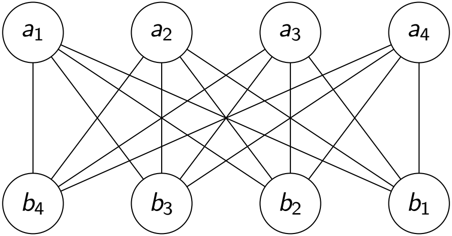
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (モデル化)

このとき，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチングを求める



w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

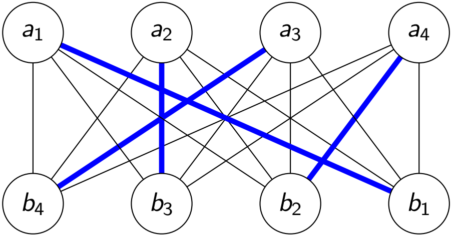
$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3$

注意：グラフを用いたモデル化では以下を明確に

- 構成するグラフの頂点集合と辺集合が何であるのか
- 各頂点と各辺の意味は何であるのか
- 重みがある場合，重みは何であり，それが何を意味するのか
- 何を求めたいのか

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (求めた結果)

以下は，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチング

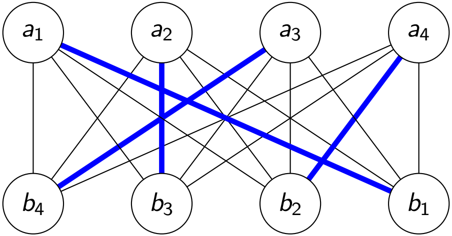


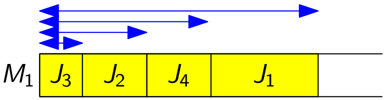
w	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	10	15	20
a_2	3	6	9	12
a_3	2	4	6	8
a_4	3	6	9	12

重み和 $= 5 + 9 + 8 + 6 = 28$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 1 台の場合 (求めた結果)

以下は，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチング





J_3, J_2, J_4, J_1 の順に処理する

重み和 $= 5 + 9 + 8 + 6 = 28$

格言

モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (予備考察)

考え方

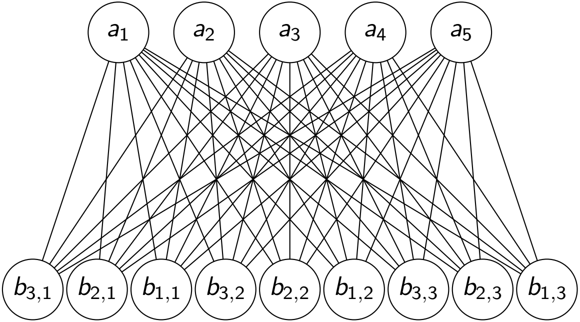
どの機械が何台処理するか，解く前には分からないので，
それが未定であるとして，グラフを構成する

ただし，

- 完了時刻和最小のスケジュールではジョブを 1 つも処理しない機械はない
- ∴ モデル化においても，ジョブを 1 つも処理しない機械がないと仮定できる

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

次に説明する完全二部グラフ G と非負辺重み関数 w を考える

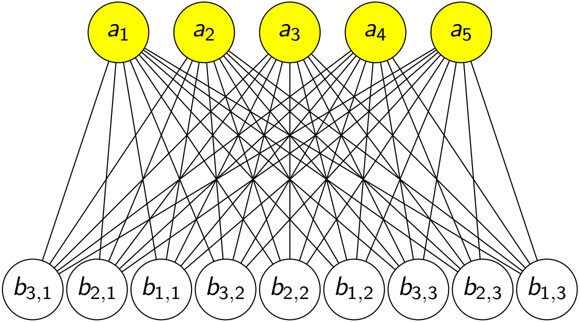


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

頂点 a_i はジョブ J_i に対応する

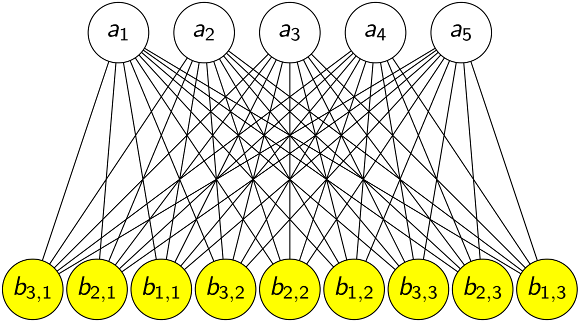


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

頂点 $b_{j,k}$ は機械 j における後ろから k 番目の場所を表す

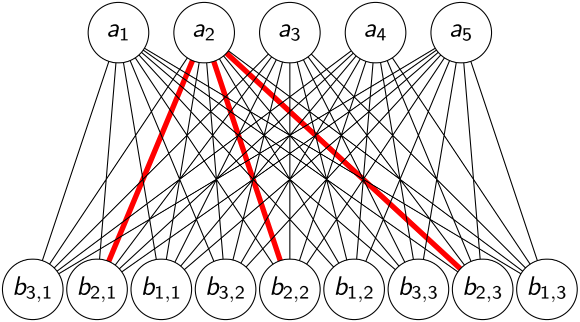


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

辺 $\{a_i, b_{j,k}\}$ はジョブ J_i を機械 j の後ろから k 番目に置くことを表す

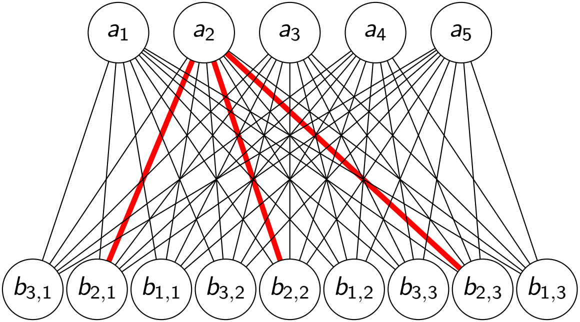


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

辺 $\{a_i, b_{j,k}\}$ の重みは $k \cdot p_i$ である

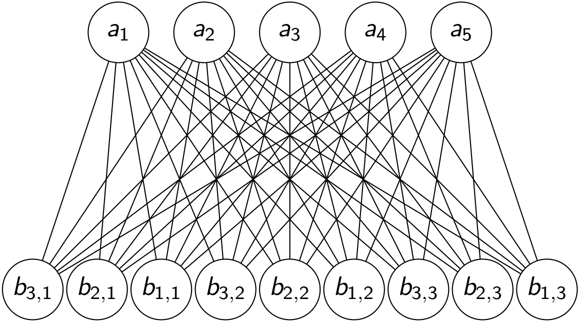


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (モデル化)

このとき，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチングを求める

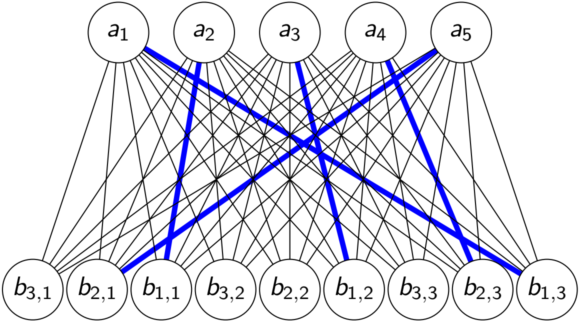


w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

$p_1 = 5,\ p_2 = 3,\ p_3 = 6,\ p_4 = 3,\ p_5 = 2$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (求めた結果)

以下は，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチング

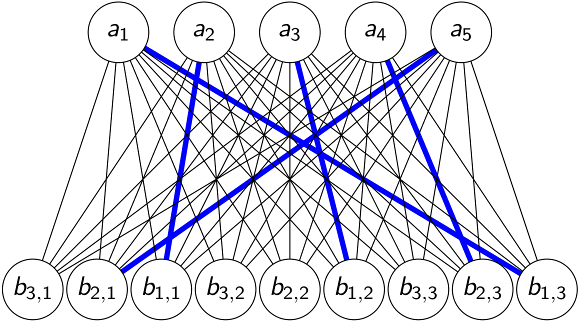


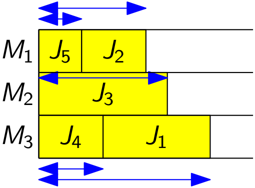
w	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	$b_{3,k}$
a_1	5	10	15
a_2	3	6	9
a_3	6	12	18
a_4	3	6	9
a_5	2	4	6

重み和 $= 2 + 5 + 6 + 3 + 8 = 24$

完了時刻和最小化スケジューリング：機械 m 台の場合 (求めた結果)

以下は，A の頂点をすべて飽和する最小重みマッチング





M_1 で J_5, J_2 の順に処理
M_2 で J_3 を処理
M_3 で J_4, J_1 の順に処理

格言

モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

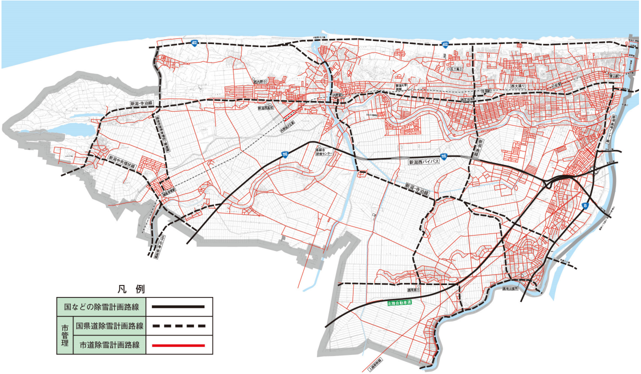
目次

除雪車の運行計画問題

除雪車の運行計画問題

除雪車を効率よく運行するルートを決定したい

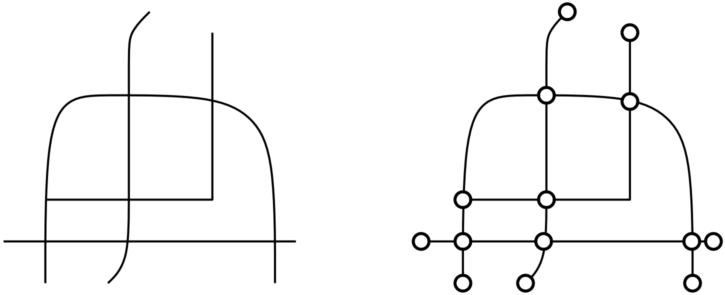
以下，除雪車が 1 台だけの場合を考える



https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html

交通網のモデル化

道路ネットワークをグラフとしてモデル化

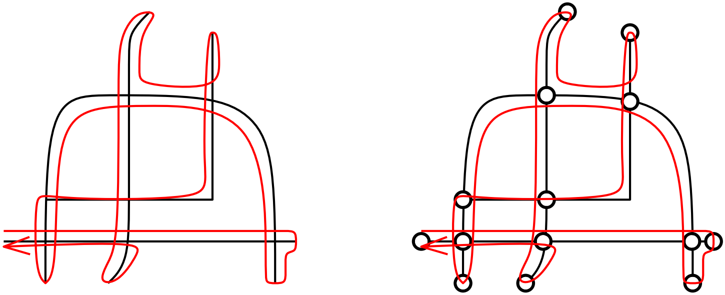


交差点，行き止まり → 頂点
道路 → 辺

問題によっては有向グラフを使うこともある

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る



二度以上通っている辺には「無駄」がある

⇝ 「無駄」を最小化したい

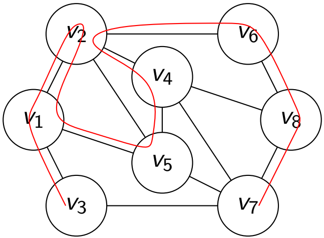
グラフにおける歩道

無向グラフ $G = (V, E)$

歩道とは？

G における**歩道**とは，頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で
任意の $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して，$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ であるもの

直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい道」



$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7$ はこのグラフにおける歩道

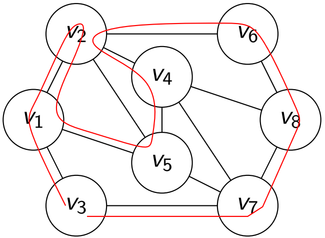
グラフにおける回路

無向グラフ $G = (V, E)$

回路とは？

G における回路 (または閉歩道) とは，歩道 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で $v_1 = v_k$ を満たすもののこと

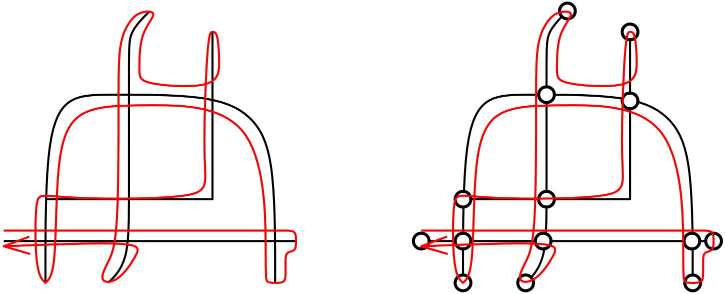
直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい閉路」



$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7, v_3$ はこのグラフにおける回路

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る



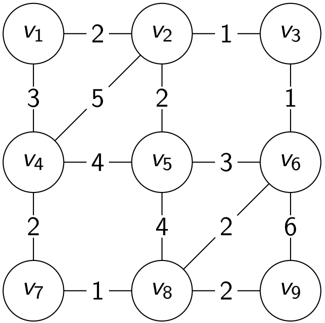
二度以上通っている辺には「無駄」がある
⇝ 「無駄」を最小化したい

行いたいこと

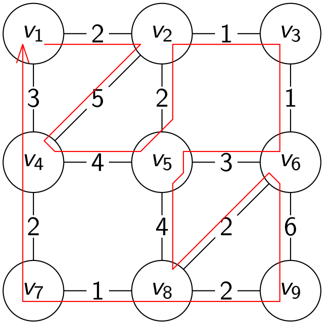
すべての辺を通る回路で,「長さ」が最小のものを見つけたい

長さ ＝ 辺の重み (長さ) の和

例題 1



例題 1



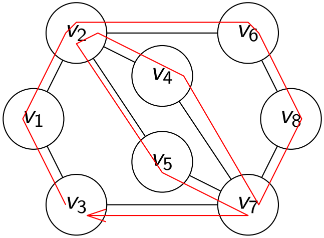
無駄のない除雪計画
(すべての辺をちょうど一度ずつ通る回路が存在)

オイラー回路

無向グラフ $G = (V, E)$

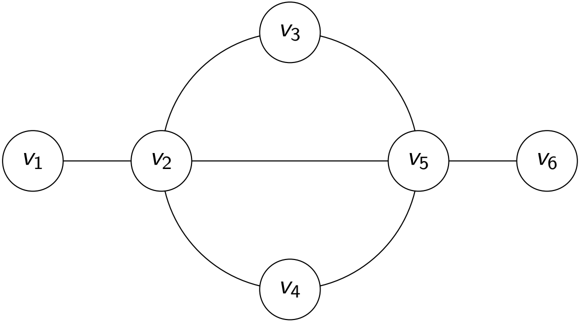
オイラー回路とは？

G における**オイラー回路**とは，回路 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で G のすべての辺をちょうど一度ずつ通るもの



オイラー回路を持たないグラフ

次のグラフはオイラー回路を持たない

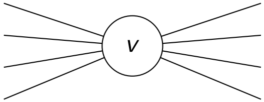


どんなグラフがオイラー回路を持ち，
どんなグラフがオイラー回路を持たないのだろうか？

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

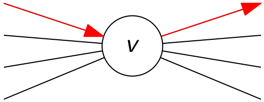


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

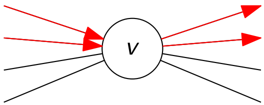


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

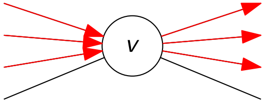


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

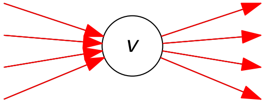


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数



つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要十分条件

無向グラフ $G = (V, E)$

オイラー回路を持つための必要十分条件

G がオイラー回路を持つ $\Leftrightarrow$ 次の 2 つがともに成り立つ

1. G は連結
2. G の任意の頂点の次数が偶数

「$\Rightarrow$」の証明：演習問題 (前ページの内容がヒント)
「$\Leftarrow$」の証明の概略：辺数に関する帰納法

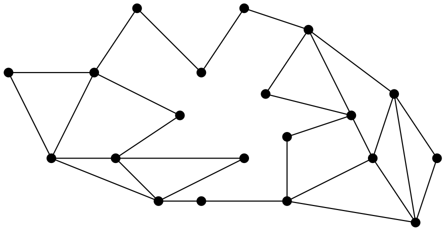
- $|E| = 0$ のときを考えると，G は辺数 0 のオイラー回路を持つ
- 辺数 k 以下の任意の無向グラフ G' に対して，
  G' が連結であり，G' の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
  G' がオイラー回路を持つと仮定する

オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，
G が連結であり，G の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
G がオイラー回路を持つ

- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上

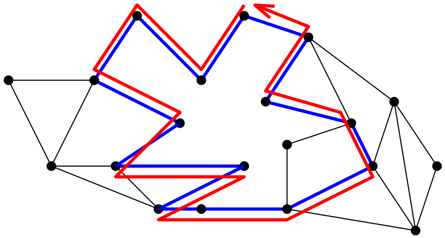


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して,
G が連結であり, G の任意の頂点の次数が偶数であるならば,
G がオイラー回路を持つ

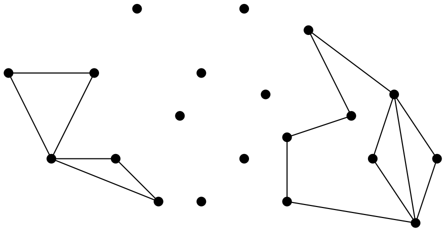
- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上
- 演習問題 2.7 より，G は閉路を含む (それを C とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

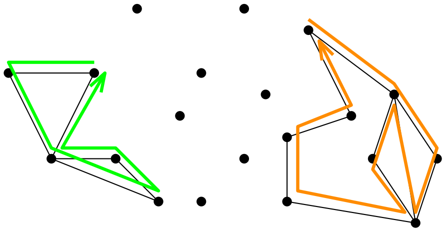
- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)

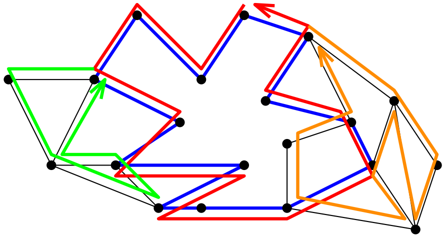


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 3)

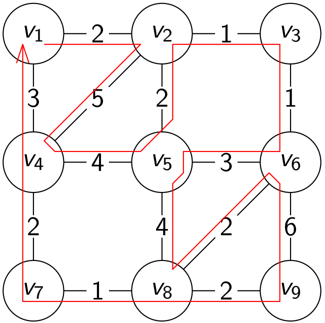
G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- $C_1, \ldots, C_k$ と C を組み合わせることで,
  G のオイラー回路を構成できる　　(詳細は演習問題)

□



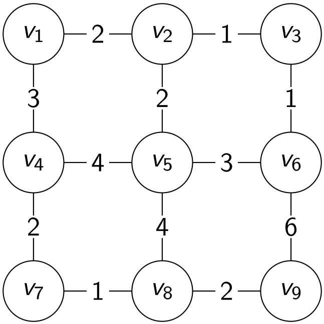
例題 1 (再び)



各頂点の次数が偶数

- ∴ オイラー回路が存在
- ∴ 無駄のない除雪が可能

例題 2

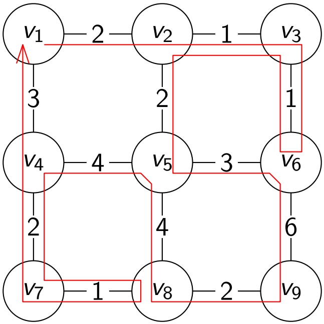


次数が奇数である頂点が存在

- ∴ オイラー回路が存在しない
- ∴ 無駄のない除雪が可能ではない
- ⇝ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

例題 2

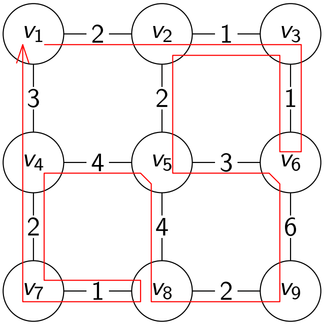


次数が奇数である頂点が存在

- ∴ オイラー回路が存在しない
- ∴ 無駄のない除雪が可能ではない
- ⇝ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

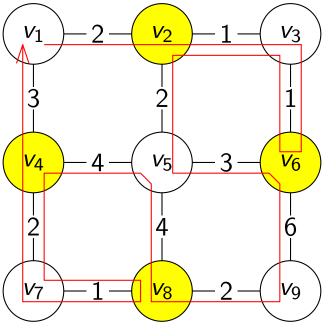
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数　(演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

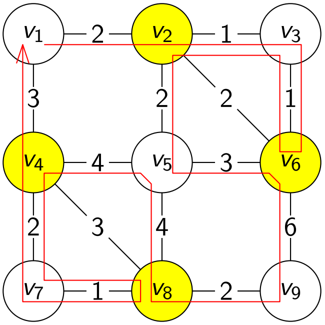
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

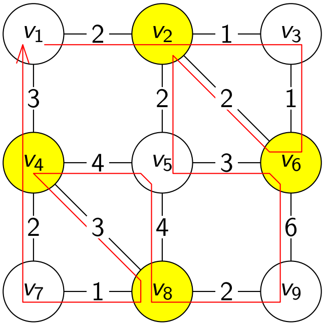
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数　(演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

例題 2：仮想的な道路を追加

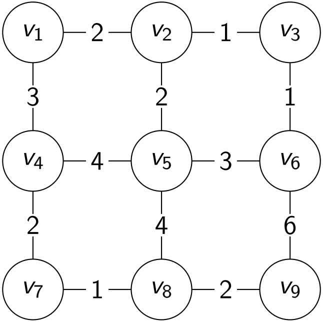


- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数　　(演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

無駄を抑える辺の引き方

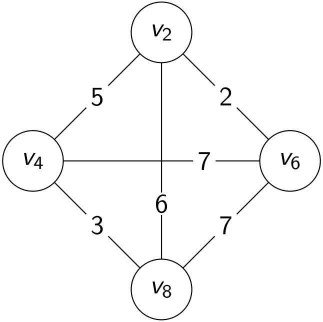
次数が奇数である頂点の間で，最も効率的な経路の長さを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

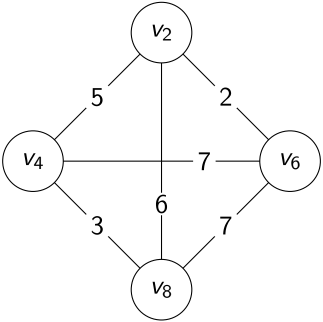
次のような完全グラフと非負辺重みを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

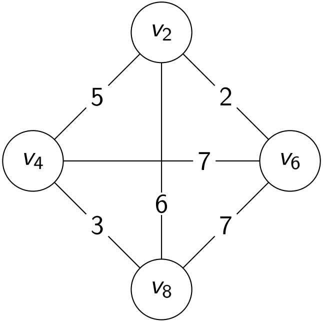
各頂点は元のグラフにおいて次数が奇数である頂点 (注：頂点数は偶数)



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

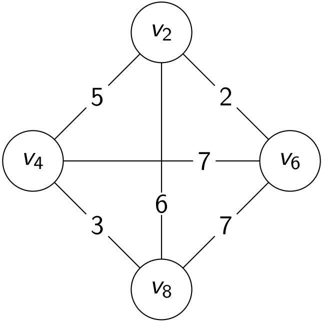
辺の重みは，対応する 2 頂点間の最短経路長



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

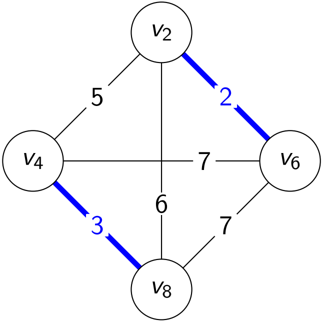
求めたいものは，最小重み完全マッチング



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

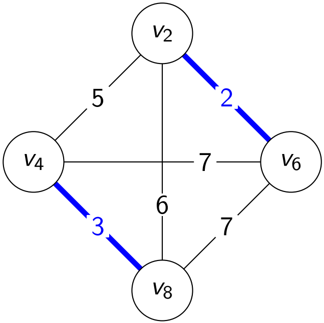
次のマッチングは最小重み完全マッチング

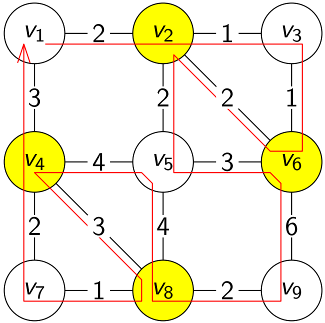


	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





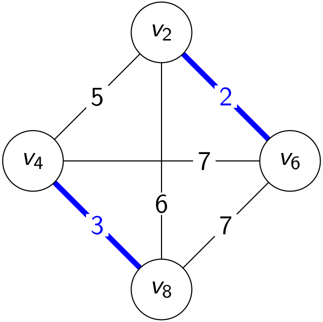
格言

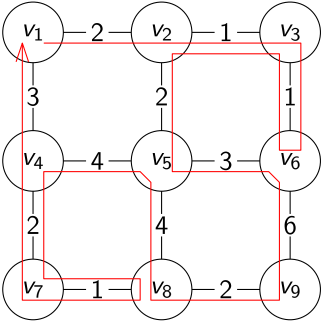
モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





格言

モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

目次

概要

今日の目標

最大重みマッチングを使って問題を解決する例を見る

- 完了時刻和最小化スケジューリング
- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次