

グラフとネットワーク 第3回
木：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014年4月25日

最終更新：2014年5月9日 10:15

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/11) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/18) |
| 3 | 木：数理 | (4/25) |
| 4 | 全域木：数理 | (5/2) |
| 5 | マッチング：数理 | (5/9) |
| 6 | マッチング：モデル化 | (5/16) |
| 7 | 最大流：数理 | (5/23) |
| 8 | 最大流：モデル化 (1) | (5/30) |
| 9 | 最大流：モデル化 (2) | (6/6) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|------------|--------|
| 10 | 連結性：モデル化 | (6/13) |
| 11 | 彩色：数理 | (6/20) |
| | ● 中間試験 | (6/27) |
| | * 休講 | (7/4) |
| 12 | 彩色：モデル化 | (7/11) |
| 13 | 平面グラフ：数理 | (7/18) |
| 14 | 平面グラフ：モデル化 | (7/25) |
| | ● 期末試験 | (8/8?) |

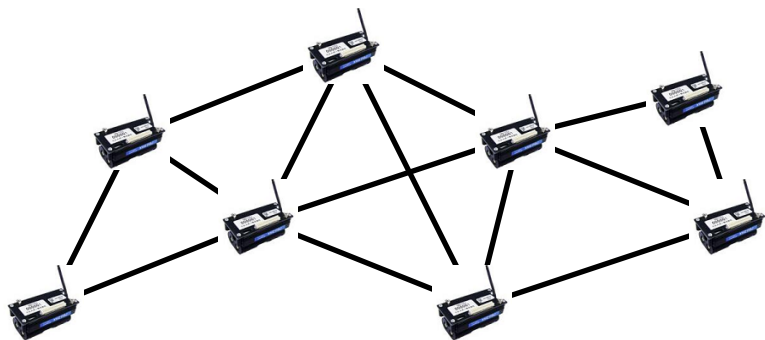
注意：予定の変更もありうる

センサネットワークにおける通信

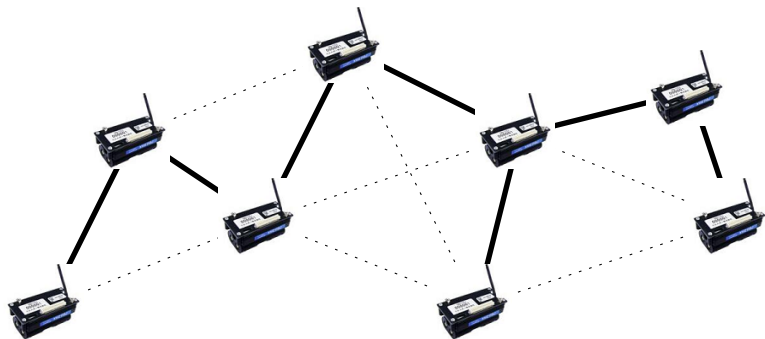


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信

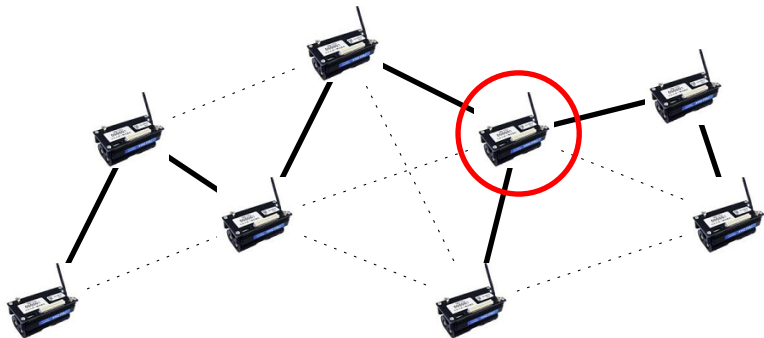


<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>



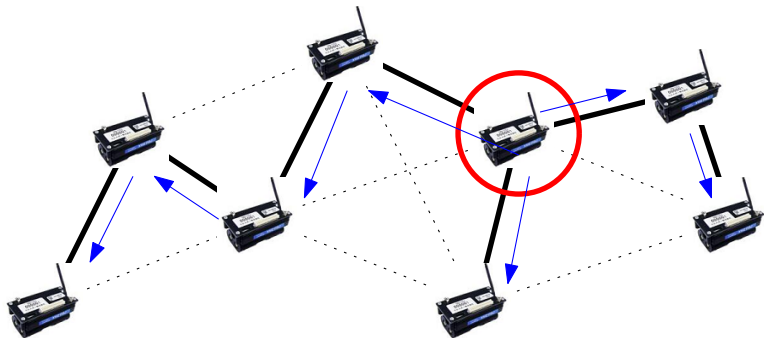
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



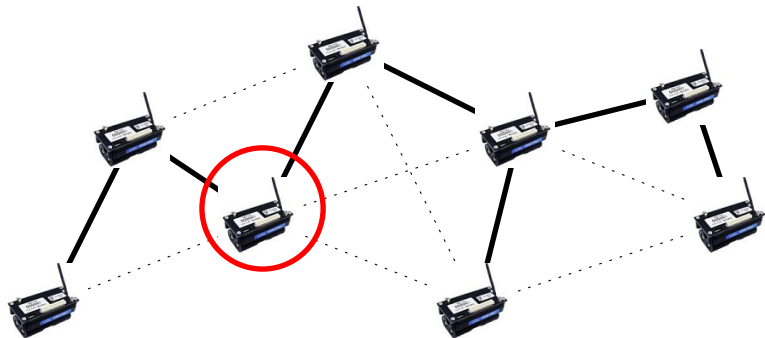
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



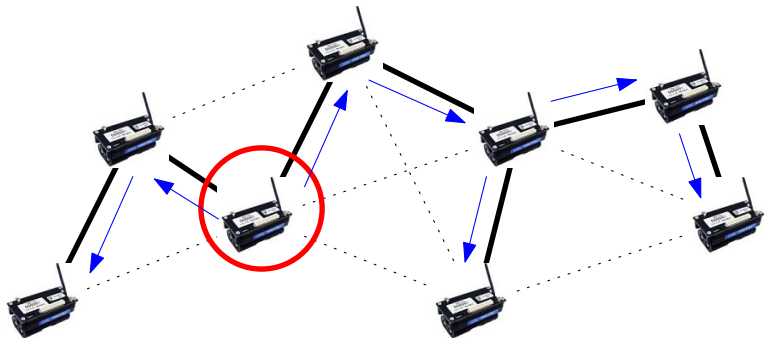
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

今日の目標

「木」を理解する

- ▶ 木の定義を理解する
- ▶ 木の基本的な性質を理解し、証明できるようになる

証明技法

- ▶ 数学的帰納法の使い方を理解して、使えるようになる

離散数学における証明手法

- ▶ 数え上げ論法 (前々回)
- ▶ 最大性論法／最小性論法 (前回)
- ▶ 数学的帰納法 (今回)

目次

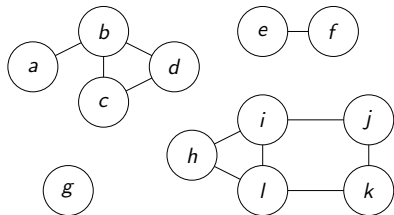
- ① グラフの連結性と連結成分
- ② 木
- ③ 木の諸性質
- ④ 今日のまとめ

グラフの連結性

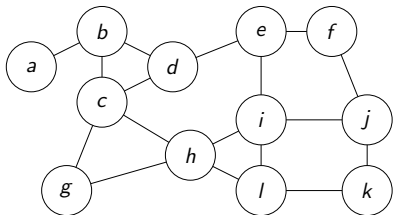
無向グラフ $G = (V, E)$

グラフが連結であるとは？

G が**連結**であるとは、
 任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは**非連結**と呼ばれる

非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

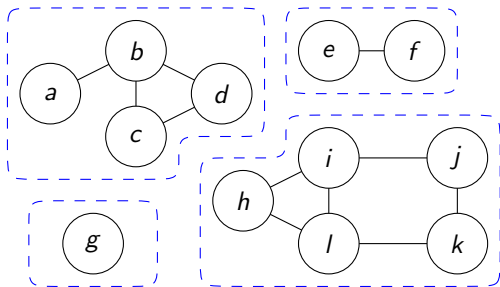
グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

 G の連結成分とは、 G の極大連結部分グラフのこと

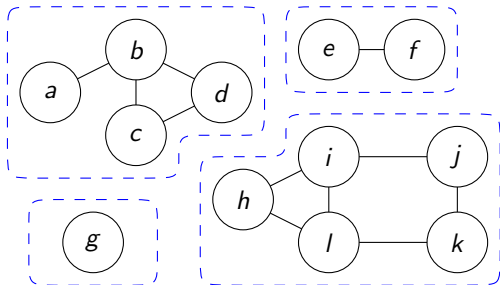
(「極大」とは、グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」)



連結成分の数 = 4

グラフの孤立点

次数0の頂点を**孤立点**と呼ぶ



g は孤立点

グラフの切断辺

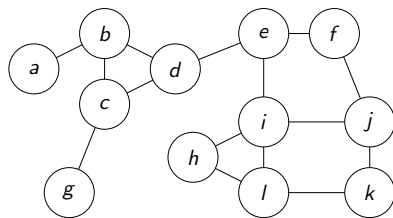
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

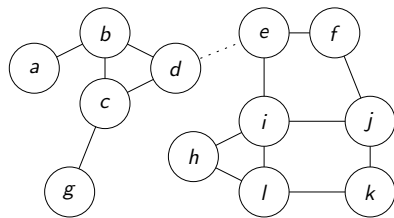
e が G の切断辺であるとは,
 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点

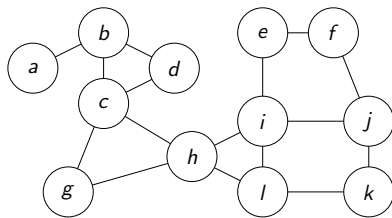
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

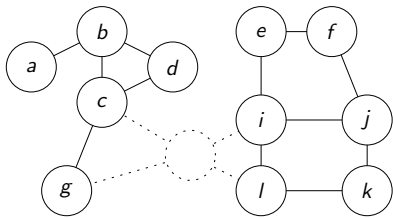
v が G の切断点であるとは,
 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点 (「 v を除去」とは、 v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G

 $G - h$

目次

① グラフの連結性と連結成分

② 木

③ 木の諸性質

④ 今日のまとめ

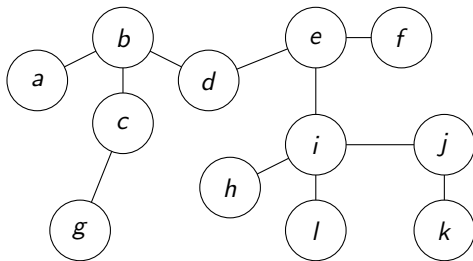
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは、次の2つの条件を満たすこと

- ▶ G は連結である
- ▶ G は閉路を部分グラフとして含まない



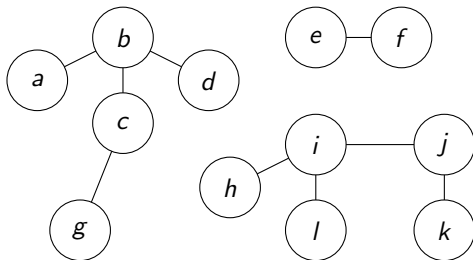
森

無向グラフ $G = (V, E)$

森とは？

G が森 (または林) であるとは、次の条件を満たすこと

- ▶ G は閉路を部分グラフとして含まない



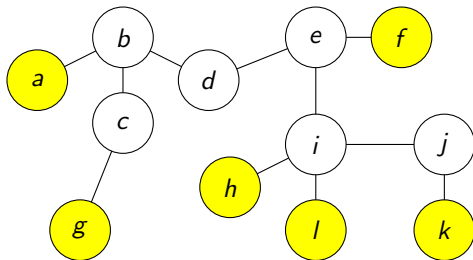
木は森であり、森の各連結成分は木である

木と葉

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$

木は葉を持つ

G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する



木における次数 1 の頂点を葉と呼ぶ

木は葉を持つ：証明 (1)

最大性論法に基づく.

- ▶ G に含まれる長さ最大の道を P とする.



木は葉を持つ：証明 (1)

最大性論法に基づく.

- ▶ G に含まれる長さ最大の道を P とする.
- ▶ G は連結であり, $|V| \geq 2$ なので, P の頂点数は 2 以上.
- ▶ P の端点を u, v とする.
(このとき, P の頂点数が 2 以上であることから, $u \neq v$.)



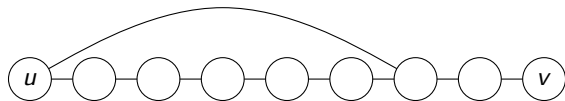
木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**で証明： u の次数が2以上であると仮定する.
- ▶ **矛盾.**
- ▶ したがって、 u の次数は1である.



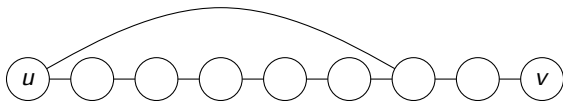
木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**で証明： u の次数が2以上であると仮定する.
- ▶ P が長さ最大の道であることから， u に隣接する頂点は P 上にある.
- ▶ **矛盾.**
- ▶ したがって， u の次数は1である.



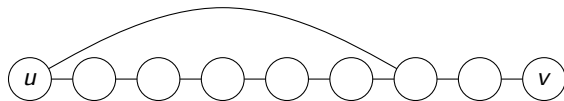
木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**で証明： u の次数が2以上であると仮定する。
- ▶ P が長さ最大の道であることから、 u に隣接する頂点は P 上にある。
- ▶ したがって、 G は閉路を含む。
- ▶ これは G が閉路を含まないことに**矛盾**。
- ▶ したがって、 u の次数は1である。



木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**で証明： u の次数が2以上であると仮定する。
- ▶ P が長さ最大の道であることから， u に隣接する頂点は P 上にある。
- ▶ したがって， G は閉路を含む。
- ▶ これは G が閉路を含まないことに**矛盾**。
- ▶ したがって， u の次数は1である。
- ▶ 同様に， v の次数も1である。 □

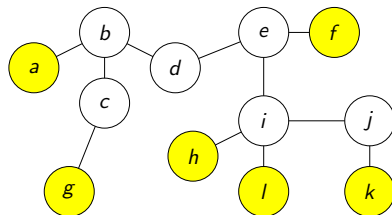


木における葉の役割

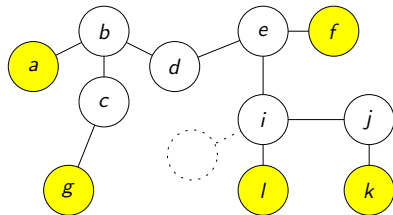
木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



$G - h$

格言

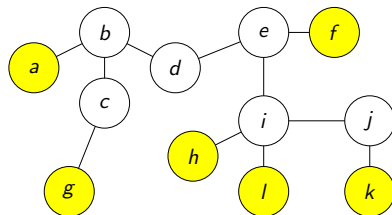
仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木における葉の役割

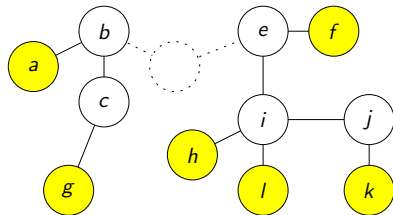
木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



$G - d$

格言

仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木から葉を除去しても木：証明の着想

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

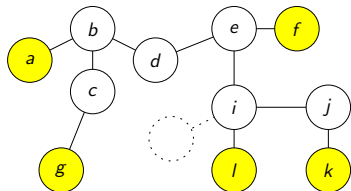
木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明の着想：定義に戻る

木であることの定義

- ▶ 連結である
 - ▶ 閉路を含まない
-
- ▶ $G - v$ が閉路を含まないことは簡単に分かる
 - ▶ $G - v$ の任意の2頂点 u, w に対して, u から w に至る道が存在すればよい
 - ▶ G において, u から w に至る道で, v を通らないものが存在すればよい



木から葉を除去しても木：証明 (1)

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明： $G - v$ が閉路を含まず，かつ，連結であることを示す．

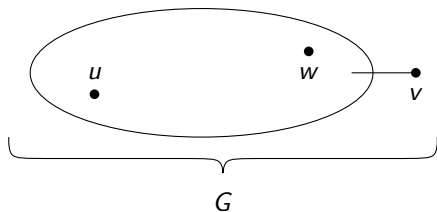
[閉路を含まないこと]

- ▶ G は木なので， G は閉路を含まない
- ▶ $G - v$ は G の部分グラフなので， $G - v$ も閉路を含まない．

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

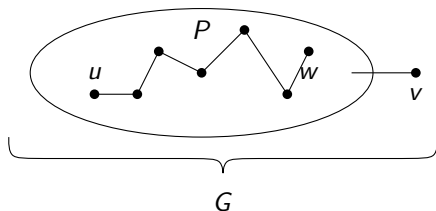
- ▶ $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- ▶ 証明したいこと： u から w へ至る道が $G - v$ にあること.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

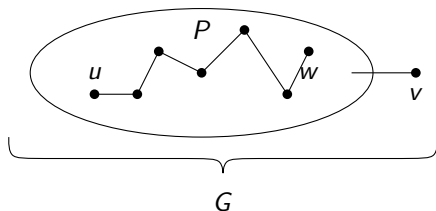
- ▶ $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- ▶ 証明したいこと： u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- ▶ u, w は G の頂点であり、 G は連結なので、 G において u から w へ至る道 P が存在する.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

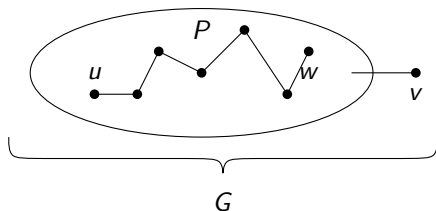
- ▶ $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- ▶ 証明したいこと： u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- ▶ u, w は G の頂点であり， G は連結なので， G において u から w へ至る道 P が存在する.
- ▶ P において， u, w 以外の頂点の次数は 2 以上.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

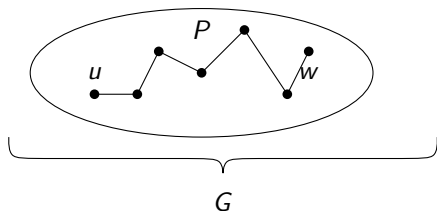
- ▶ $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- ▶ 証明したいこと： u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- ▶ u, w は G の頂点であり、 G は連結なので、 G において u から w へ至る道 P が存在する.
- ▶ P において、 u, w 以外の頂点の次数は 2 以上.
- ▶ v の次数は 1 なので、 P は v を通らない.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- ▶ $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- ▶ 証明したいこと： u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- ▶ u, w は G の頂点であり、 G は連結なので、 G において u から w へ至る道 P が存在する.
- ▶ P において、 u, w 以外の頂点の次数は 2 以上.
- ▶ v の次数は 1 なので、 P は v を通らない.
- ▶ したがって、 P は $G - v$ において u から w へ至る道である. □

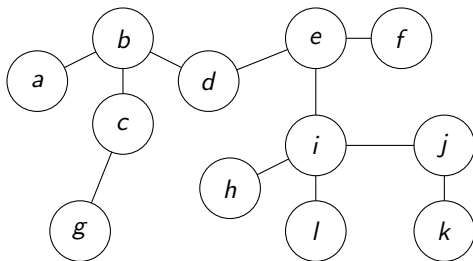


木の辺数

木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$



$$|V| = 12, |E| = 11$$

木の辺数：帰納法による証明 (1)

木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明： $|V|$ に関する帰納法つまり、 n に関する帰納法によって次を証明する頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

木の辺数：帰納法による証明 (2)

つまり、 n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明： n に関する帰納法で証明する。

- ▶ 頂点数 1 の任意の木 $G = (V, E)$ を考える。(つまり、 $|V| = 1$)
- ▶ G は辺を持たないので、その辺の数 $|E|$ は 0.
- ▶ したがって、 $|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$.

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり、 n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明 (続き)：帰納段階へ進む.

- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり、 n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明 (続き)：帰納段階へ進む.

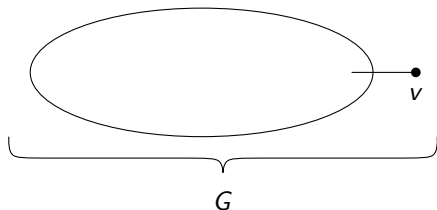
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (離散数学の復習)

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

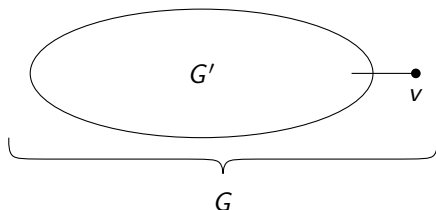
- ▶ 仮定：頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ
- ▶ 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つ

証明の着想

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在.
- ▶ $G' = G - v$ として, G' に帰納法の仮定を適用.

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

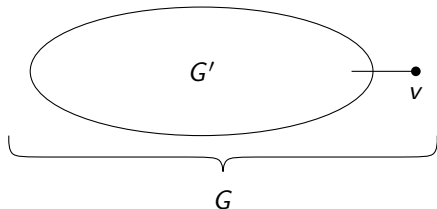
- ▶ 仮定：頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ
- ▶ 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つ

証明の着想

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在.
- ▶ $G' = G - v$ として, G' に帰納法の仮定を適用.

木の辺数：帰納法による証明 (5)

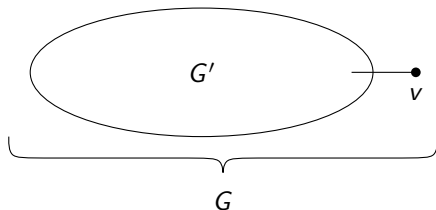
- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.



木の辺数：帰納法による証明 (5)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在する.

(証明済)

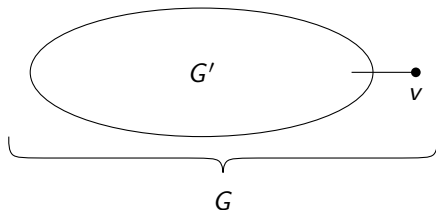


木の辺数：帰納法による証明 (5)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在する.
- ▶ $G' = G - v$ とすると, $G' = (V', E')$ も木である.

(証明済)

(証明済)

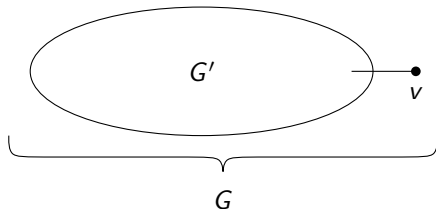


木の辺数：帰納法による証明 (5)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在する.
- ▶ $G' = G - v$ とすると, $G' = (V', E')$ も木である.
- ▶ $|V'| = |V| - 1 = k$, かつ, $|E'| = |E| - 1$.

(証明済)

(証明済)

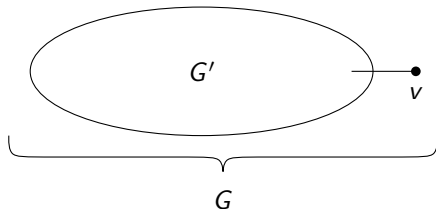


木の辺数：帰納法による証明 (5)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在する.
- ▶ $G' = G - v$ とすると, $G' = (V', E')$ も木である.
- ▶ $|V'| = |V| - 1 = k$, かつ, $|E'| = |E| - 1$.
- ▶ 帰納法の仮定より, $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ.

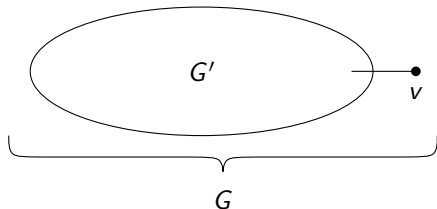
(証明済)

(証明済)



木の辺数：帰納法による証明 (5)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉 v が存在する. (証明済)
- ▶ $G' = G - v$ とすると, $G' = (V', E')$ も木である. (証明済)
- ▶ $|V'| = |V| - 1 = k$, かつ, $|E'| = |E| - 1$.
- ▶ 帰納法の仮定より, $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ.
- ▶ したがって, $|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V'| = |V| - 1$. □



木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い!! (または, 不十分) — どこがおかしいのか?

具体的に指摘してみよ

- ▶ 同じく帰納法による証明で, 帰納段階を考える.
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること: 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い!! (または, 不十分) — どこがおかしいのか?

具体的に指摘してみよ

- ▶ 同じく帰納法による証明で, 帰納段階を考える.
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること: 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- ▶ 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える.
(帰納法の仮定から, $|E'| = |V'| - 1$)

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い!! (または, 不十分) — どこがおかしいのか?

具体的に指摘してみよ

- ▶ 同じく帰納法による証明で, 帰納段階を考える.
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること: 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- ▶ 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える.
(帰納法の仮定から, $|E'| = |V'| - 1$)
- ▶ その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると, G も木である.

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い!! (または, 不十分) — どこがおかしいのか?

具体的に指摘してみよ

- ▶ 同じく帰納法による証明で, 帰納段階を考える.
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること: 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- ▶ 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える.
(帰納法の仮定から, $|E'| = |V'| - 1$)
- ▶ その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると, G も木である.
- ▶ G の作り方から, $|E| = |E'| + 1$ と $|V| = |V'| + 1$ が成り立つ.

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い!! (または, 不十分) — どこがおかしいのか?

具体的に指摘してみよ

- ▶ 同じく帰納法による証明で, 帰納段階を考える.
- ▶ 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する.
- ▶ 証明すること: 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- ▶ 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える.
(帰納法の仮定から, $|E'| = |V'| - 1$)
- ▶ その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると, G も木である.
- ▶ G の作り方から, $|E| = |E'| + 1$ と $|V| = |V'| + 1$ が成り立つ.
- ▶ したがって, $|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V| - 1$. □

目次

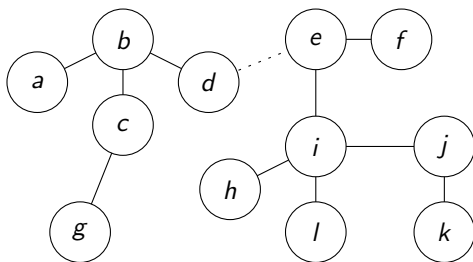
- ① グラフの連結性と連結成分
- ② 木
- ③ 木の諸性質
- ④ 今日のまとめ

木においてどの辺も切断辺である

木 $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である



証明 : $|V|$ に関する帰納法.

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

木においてどの辺も切断辺である

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して e は G の切断辺である

証明： n に関する帰納法で証明する。

- ▶ $n = 1$ のとき， G は辺を持たないので，正しい。

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

木においてどの辺も切断辺である

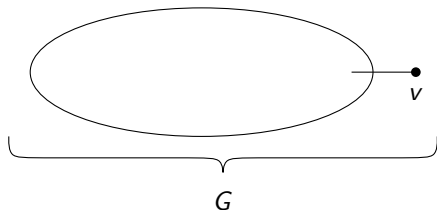
頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して e は G の切断辺である

証明： n に関する帰納法で証明する。

- ▶ $n = 1$ のとき， G は辺を持たないので，正しい。
- ▶ $n = k \geq 1$ として，
頂点数 k の任意の木 $G' = (V', E')$ と任意の辺 $e' \in E'$ に対して e' が G' の切断辺であると仮定する。
- ▶ 証明すること：
頂点数 $k + 1 \geq 2$ の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して e が G の切断辺であること。

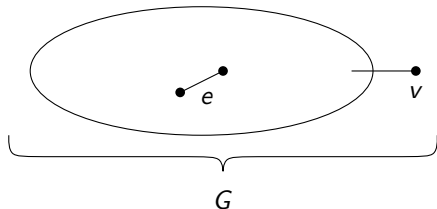
木においてどの辺も切断辺である：証明 (2)

- ▶ 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える.
- ▶ $k + 1 \geq 2$ なので, G には葉が存在する.
- ▶ その葉を v とする.
- ▶ 場合分け
 - 1 e が v に接続する辺ではない場合
 - 2 e が v に接続する辺である場合



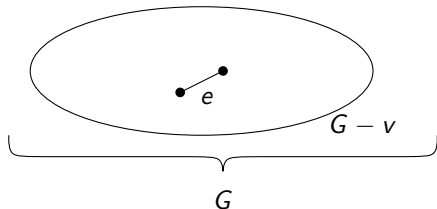
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

- 1 e が v に接続する辺ではない場合
 - ▶ v は G の葉なので、 $G - v$ も木である.



木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

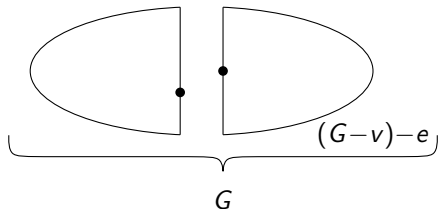
- 1 e が v に接続する辺ではない場合
- ▶ v は G の葉なので、 $G - v$ も木である.
 - ▶ G において e は v に接続していないので、 e は $G - v$ の辺である.



木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

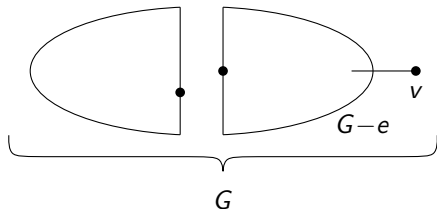
1 e が v に接続する辺ではない場合

- ▶ v は G の葉なので、 $G - v$ も木である.
- ▶ G において e は v に接続していないので、 e は $G - v$ の辺である.
- ▶ 帰納法の仮定から、 e は $G - v$ の切断辺である.
(すなわち、 $(G - v) - e$ は非連結)



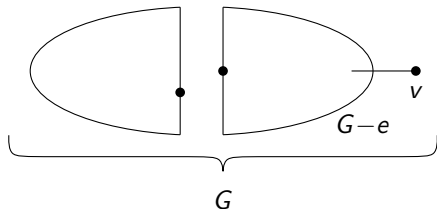
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

- 1 e が v に接続する辺ではない場合
- ▶ v は G の葉なので、 $G - v$ も木である.
 - ▶ G において e は v に接続していないので、 e は $G - v$ の辺である.
 - ▶ 帰納法の仮定から、 e は $G - v$ の切断辺である。
(すなわち、 $(G - v) - e$ は非連結)
 - ▶ $G - e$ において、 v の次数は 1 なので、 $G - e$ も非連結



木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

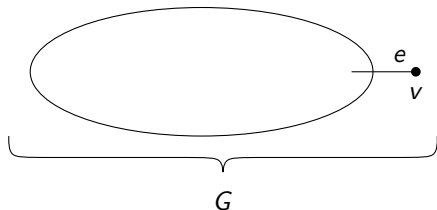
- 1 e が v に接続する辺ではない場合
- ▶ v は G の葉なので、 $G - v$ も木である.
 - ▶ G において e は v に接続していないので、 e は $G - v$ の辺である.
 - ▶ 帰納法の仮定から、 e は $G - v$ の切断辺である。
(すなわち、 $(G - v) - e$ は非連結)
 - ▶ $G - e$ において、 v の次数は 1 なので、 $G - e$ も非連結
 - ▶ したがって、 e は G の切断辺である.



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2 e が v に接続する辺である場合

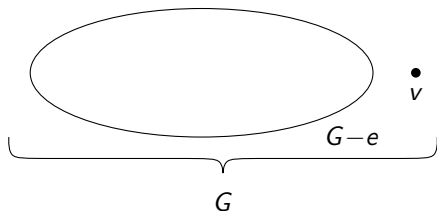
- ▶ v は葉であるので、 $G - e$ において v は孤立点である。
(つまり、 $G - e$ は非連結.)



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2 e が v に接続する辺である場合

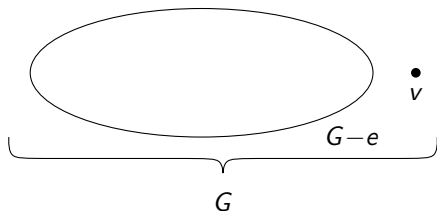
- ▶ v は葉であるので、 $G - e$ において v は孤立点である。
(つまり、 $G - e$ は非連結.)



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2 e が v に接続する辺である場合

- ▶ v は葉であるので、 $G - e$ において v は孤立点である。
(つまり、 $G - e$ は非連結.)
- ▶ したがって、 e は G の切断辺である.

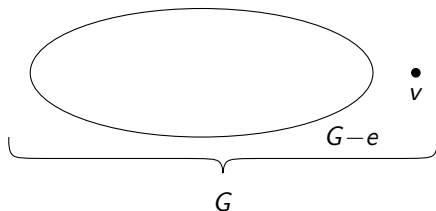


木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2 e が v に接続する辺である場合

- ▶ v は葉であるので、 $G - e$ において v は孤立点である。
(つまり、 $G - e$ は非連結.)
- ▶ したがって、 e は G の切断辺である。

どちらの場合においても、 e は G の切断辺である。

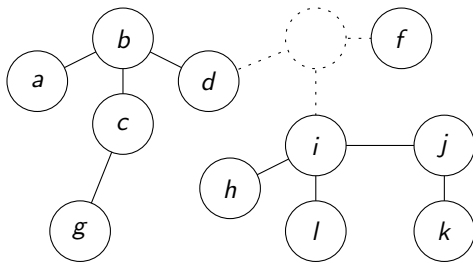


木において葉以外のどの頂点も切断点である

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, 葉ではない頂点 $v \in V$

木において葉以外のどの頂点も切断点である

v は G の切断点である



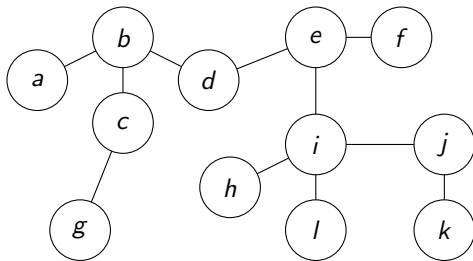
証明 : 演習問題 (ヒント : $|V|$ に関する帰納法)

木と道

木 $G = (V, E)$, $u, v \in V$

木の2点間を結ぶ道はただ1つ

G において u と v を結ぶ道はただ1つ存在する



証明 : 演習問題

目次

- ① グラフの連結性と連結成分
- ② 木
- ③ 木の諸性質
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

「木」を理解する

- ▶ 木の定義を理解する
- ▶ 木の基本的な性質を理解し、証明できるようになる

証明技法

- ▶ 数学的帰納法の使い方を理解して、使えるようになる

離散数学における証明手法

- ▶ 数え上げ論法 (前々回)
- ▶ 最大性論法／最小性論法 (前回)
- ▶ 数学的帰納法 (今回)

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① グラフの連結性と連結成分
- ② 木
- ③ 木の諸性質
- ④ 今日のまとめ