グラフとネットワーク 第 2 回
道と閉路：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 18 日

最終更新：2014 年 4 月 17 日　14:31

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. 全域木：数理 (5/2)
5. マッチング：数理 (5/9)
6. マッチング：モデル化 (5/16)
7. 最大流：数理 (5/23)
8. 最大流：モデル化 (1) (5/30)
9. 最大流：モデル化 (2) (6/6)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

10. 連結性：モデル化 (6/13)
11. 彩色：数理 (6/20)
- 中間試験 (6/27)
- * 休講 (7/4)

12. 彩色：モデル化 (7/11)
13. 平面グラフ：数理 (7/18)
14. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

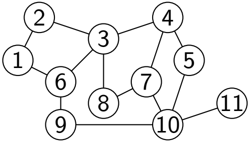
今日の目標

- 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- 最大性論法による証明の手法を理解し，使えるようになる

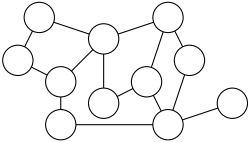
目次

ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

○の中に何も書かないときは，頂点が何であるのか興味がないとき



ラベル付きグラフ



ラベルなしグラフ

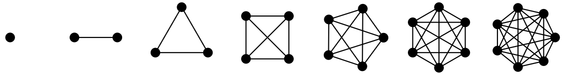
完全グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

完全グラフとは？

G が完全グラフであるとは，V のどの 2 頂点も辺で結ばれていること

頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

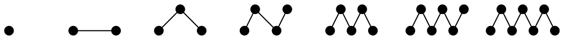
道 (パス，路)

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

道とは？

G が道であるとは，その頂点を 1 直線上に並べて，
隣り合う頂点同士を辺で結ぶことによって得られること

頂点数 n の道を P_n と表記する



P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7

- P_n における次数 1 の頂点を P_n の端点と呼ぶ
- P_n は次数 1 の 2 頂点を結ぶ道とも呼ばれる
- P_n の辺数 $n-1$ のことを P_n の長さと呼ぶ (演習問題)

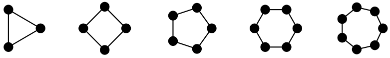
閉路 (サイクル)

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

閉路とは？

G が閉路であるとは，その頂点を同一円上に並べて，
隣り合う頂点同士を辺で結ぶことによって得られること

頂点数 n の閉路を C_n と表記する



C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

- C_n の辺数 n のことを C_n の長さと呼ぶ (演習問題)

有向道 (パス)

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

道とは？

G が有向道であるとは，その頂点を 1 直線上に並べて，
隣り合う頂点同士を一様な向きを持つ弧で結ぶことによって得られること

有向道　　有向道ではない

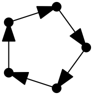
- 有向道における入次数 0 の頂点を始点，出次数 0 の頂点を終点と呼ぶ
- 有向道は入次数 0 の頂点と出次数 0 の頂点を結ぶ
- 辺数 $n-1$ のことをその長さと呼ぶ

有向閉路 (サイクル)

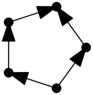
有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

有向閉路とは？

G が有向閉路であるとは，その頂点を同一円上に並べて，
隣り合う頂点同士を時計回りに弧で結ぶことによって得られること



有向閉路



有向閉路ではない

- 弧数 n のことをその長さと呼ぶ
- 頂点数 1，頂点数 2 の有向閉路もある

二部グラフ

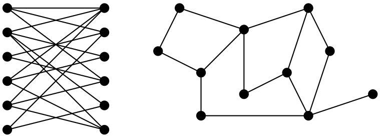
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは，次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在すること

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



二部グラフ

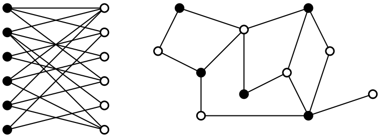
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは，次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在すること

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



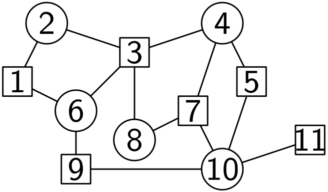
二部グラフ：定義の内容を確認する

無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは，次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在すること

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$



- $V = \{1, 2, \ldots, 11\}$
- $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
- $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{1, 2\} \in E$ であり，
  $\{1, 2\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{1, 2\} \cap B \neq \emptyset$
- $\{1, 3\} \notin E$ であり，
  $\{1, 3\} \cap B = \emptyset$

完全二部グラフ

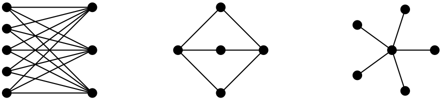
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $m, n \in \mathbb{N}$

完全二部グラフとは？

G が完全二部グラフであるとは，次を満たす A, B が存在すること

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

$|A| = m, |B| = n$ のとき，対応する完全二部グラフを $K_{m,n}$ と表記する



$K_{5,3}$ $K_{2,3}$ $K_{1,5}$

目次

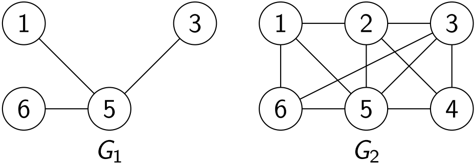
部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$

部分グラフとは？

G_1 が G_2 の部分グラフであるとは，次を満たすこと

- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$

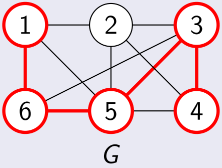


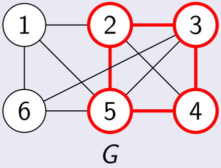
有向グラフの部分グラフも同様に定義

部分グラフとしての道と閉路

無向グラフ $G = (V, E)$ が道 (閉路) を部分グラフとして含むとき，
その道 (閉路) の頂点を順に並べることで表現することがある

次の場合，$1, 6, 5, 3, 4$ は G に含まれる道，$2, 3, 4, 5$ は G に含まれる閉路





有向グラフに対しても同様

目次

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

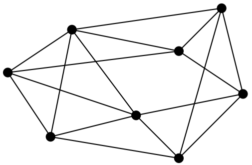
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

例：$k = 5$ の場合の例



格言

「自明に間違ってはいない」ことを常に確認する

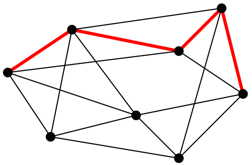
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

例：$k = 5$ の場合の例



格言

「自明に間違ってはいない」ことを常に確認する

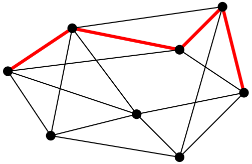
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

例：$k = 5$ の場合の例



格言

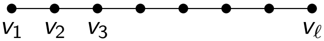
「自明に間違ってはいない」ことを常に確認する

証明の方針：G に含まれる長さ最大の道を考える

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

イメージ図



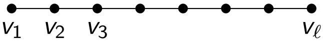
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい.

- したがって，$\ell \geq k$. □

イメージ図



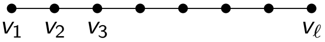
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする．

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．

- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

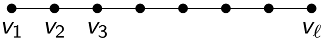
G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい.
- v_1 が P の端点であるとする.
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.

- したがって，$\ell \geq k$. □

イメージ図

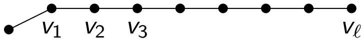


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする．

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．
- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

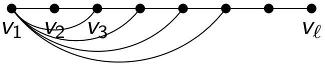
G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする．

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．

- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

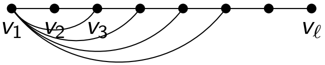
G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい.
- v_1 が P の端点であるとする.
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，

  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数
- したがって，$\ell \geq k$. □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

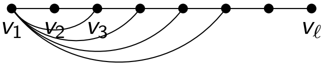
G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする．

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．
- したがって，

  $\ell - 1 =$ P における v_1 以外の頂点数 $\geq \deg_G(v_1)$
- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

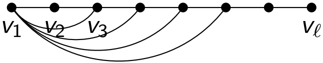
G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい.
- v_1 が P の端点であるとする.
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，

  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数 $\geq \deg_G(v_1) \geq \delta(G) \geq k - 1.$
- したがって，$\ell \geq k$. □

イメージ図



証明手法：最大性論法，最小性論法

最大性論法とは？

離散数学における重要な証明手法の１つ

1. ある性質を満たす部分集合で要素数最大のものを考える
2. その最大性を利用して，証明を進める

コメント

- 「最小次数が大きいグラフは長い道を含む」の証明は最大性論法に基づく
- グラフの頂点数が有限であることから，要素数最大の部分集合が存在することは確認できる
- 同様に「最小性論法」もある
- 他の例は後の演習問題と今後の講義の中で

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- 最大性論法による証明の手法を理解し，使えるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次