グラフとネットワーク 第 1 回
グラフの定義と次数：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 11 日

最終更新：2014 年 4 月 11 日　15:57

概要

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

どんな問題を扱うのか：例 1

MLB アメリカンリーグ 東地区 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY ＝ ニューヨーク・ヤンキース，BAL ＝ ボルティモア・オリオールズ，
BOS ＝ ボストン・レッドソックス，TOR ＝ トロント・ブルージェイズ，
DET ＝ デトロイト・タイガース

優勝可能性判定問題

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

どんな問題を扱うのか：例 1

MLB アメリカンリーグ 東地区 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

優勝可能性判定問題

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

$\rightsquigarrow$ 最大流 http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

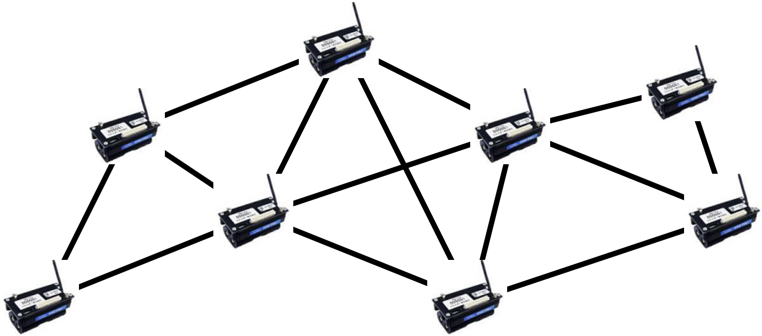
どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

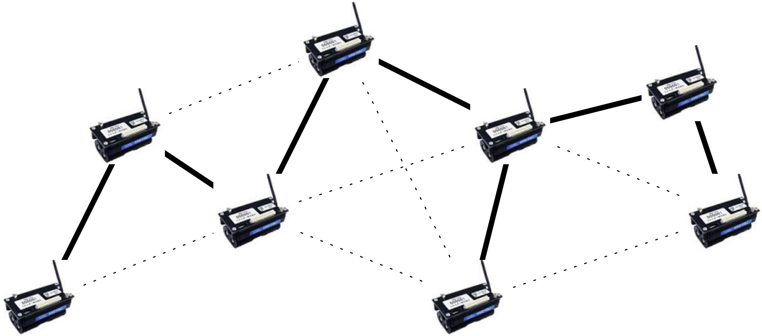


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

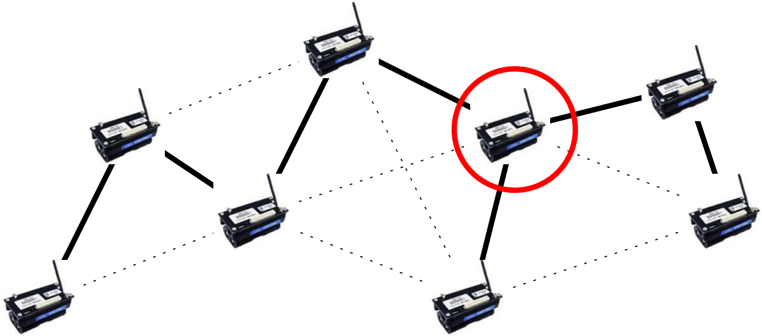


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

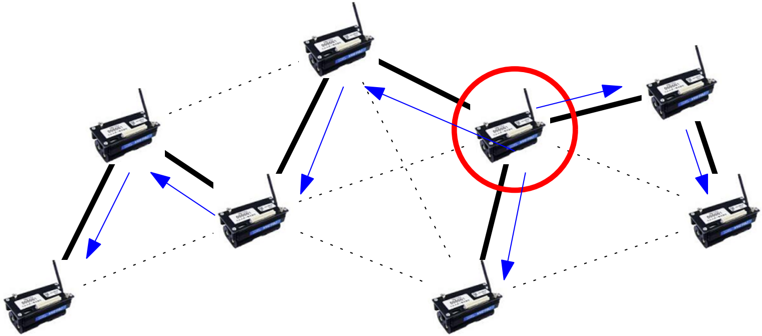


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例２

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

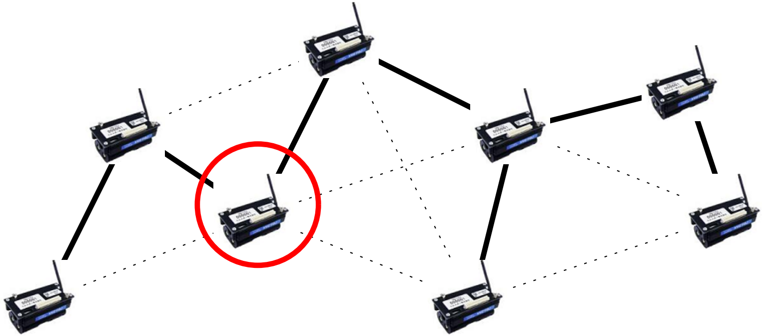


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

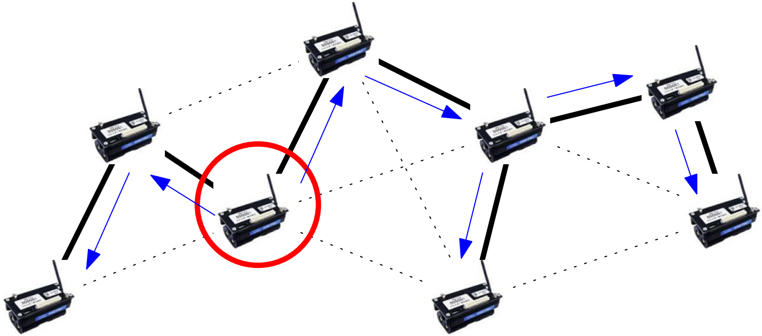


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 2

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

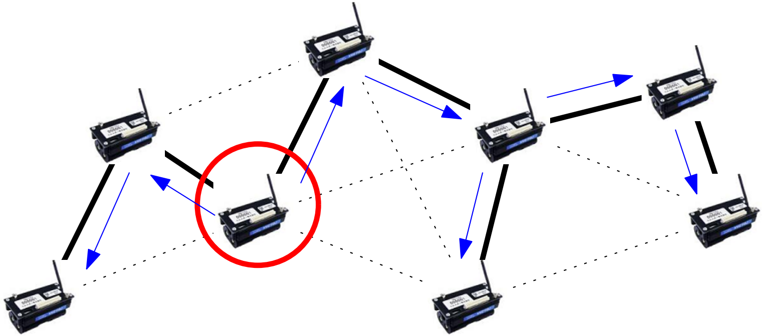


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例２

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？



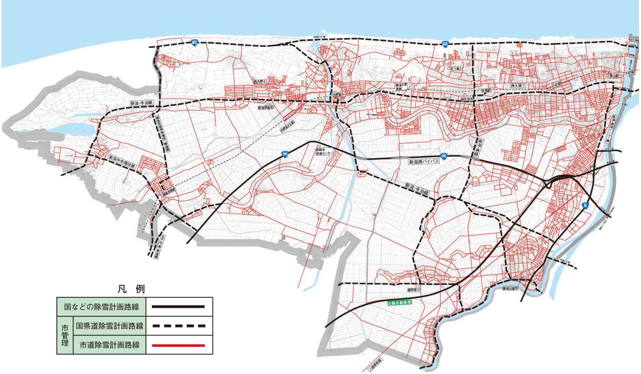
⇝ 全域木

http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 3

除雪計画

除雪車を効率よく運行するルートを決定したい

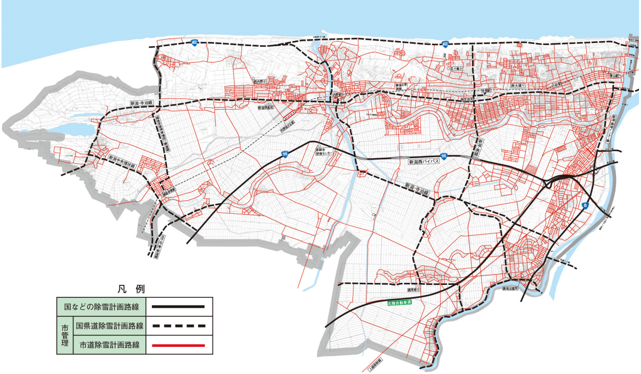


https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html

どんな問題を扱うのか：例 3

除雪計画

除雪車を効率よく運行するルートを決定したい



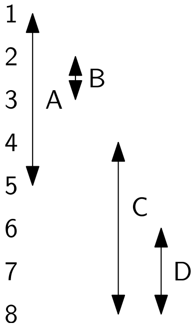
$\rightsquigarrow$ オイラー閉路，マッチング

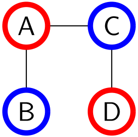
https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html

どんな問題を扱うのか：例 4

コンパイラにおけるレジスタ割当

```
1:  A = 2
2:  B = 3
3:  B = B + 2
4:  C = A + 1
5:  A = C + 3
6:  D = 4
7:  D = C + 2
8:  C = 3
```






```
1:  R1 = 2
2:  R2 = 3
3:  R2 = R2 + 2
4:  R2 = R1 + 1
5:  R1 = R2 + 3
6:  R1 = 4
7:  R1 = R2 + 2
8:  R2 = 3
```

$\rightsquigarrow$ 彩色

この講義では扱わない問題の例：最近の研究から

信頼のできない比較に基づく最大値と最小値の同時発見

n 個の数から成る配列において，最大値と最小値を見つけるためには何回の大小比較を行えばよいか？

- $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 回で必要十分 (Pohl '72)

3, 8, 2, 9, 7, 4

この講義では扱わない問題の例：最近の研究から

信頼のできない比較に基づく最大値と最小値の同時発見

n 個の数から成る配列において，最大値と最小値を見つけるためには何回の大小比較を行えばよいか？

- $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 回で必要十分 (Pohl '72)

大小比較において，高々 k 回間違いがあるとしたときはどうか？

3,　8,　2,　9,　7,　4

この講義では扱わない問題の例：最近の研究から

信頼のできない比較に基づく最大値と最小値の同時発見

n 個の数から成る配列において，最大値と最小値を見つけるためには何回の大小比較を行えばよいか？

- $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 回で必要十分 (Pohl '72)

大小比較において，高々 k 回間違いがあるとしたときはどうか？

- $(k + O(\sqrt{k}))n$ 回ぐらいで十分 (Aigner '97)

$$3, \quad 8, \quad 2, \quad 9, \quad 7, \quad 4$$

この講義では扱わない問題の例：最近の研究から

信頼のできない比較に基づく最大値と最小値の同時発見

n 個の数から成る配列において，最大値と最小値を見つけるためには何回の大小比較を行えばよいか？

- $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 回で必要十分 (Pohl '72)

大小比較において，高々 k 回間違いがあるとしたときはどうか？

- $(k + O(\sqrt{k}))n$ 回ぐらいで十分 (Aigner '97)
- $(k + 10)n$ 回ぐらいで十分 (Hoffmann, Matoušek, O, Zumstein '12)

3, 8, 2, 9, 7, 4

この講義では扱わない問題の例：最近の研究から

信頼のできない比較に基づく最大値と最小値の同時発見

n 個の数から成る配列において，最大値と最小値を見つけるためには何回の大小比較を行えばよいか？

- $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 回で必要十分 (Pohl '72)

大小比較において，高々 k 回間違いがあるとしたときはどうか？

- $(k + O(\sqrt{k}))n$ 回ぐらいで十分 (Aigner '97)
- $(k + 10)n$ 回ぐらいで十分 (Hoffmann, Matoušek, O, Zumstein '12)

3, 8, 2, 9, 7, 4

$\rightsquigarrow$ 最大流

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. 全域木：数理 (5/2)
5. マッチング：数理 (5/9)
6. マッチング：モデル化 (5/16)
7. 最大流：数理 (5/23)
8. 最大流：モデル化 (1) (5/30)
9. 最大流：モデル化 (2) (6/6)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

10	連結性：モデル化	(6/13)
11	彩色：数理	(6/20)
•	中間試験	(6/27)
*	休講	(7/4)
12	彩色：モデル化	(7/11)
13	平面グラフ：数理	(7/18)
14	平面グラフ：モデル化	(7/25)
•	期末試験	(8/8？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント

- 後田多 太一 (しいただ たいち)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/gn/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の 18:00 までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/gn/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語一覧

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載された一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (75 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の最後 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートは期限内に提出しないといけない (再提出は原則期限なし)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートは添削されて，返却される

評価

中間試験と期末試験による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- min{100, 中間試験の素点 + 期末試験の素点 } による

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが,
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

参考書

- 藤重悟,「グラフ・ネットワーク・組合せ論」，共立出版，2002.
- 繁野麻衣子,「ネットワーク最適化とアルゴリズム」，朝倉書店，2010.
- R.J. ウィルソン (著)，西関隆夫，西関裕子 (訳),「グラフ理論入門 原書第 4 版」，近代科学社，2001.
- 茨木俊秀，永持仁，石井利昌,「グラフ理論」，朝倉書店，2010.
- など

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話等はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

今から紹介する例に共通すること

間違った認識

現実世界にはたくさんネットワークが存在する

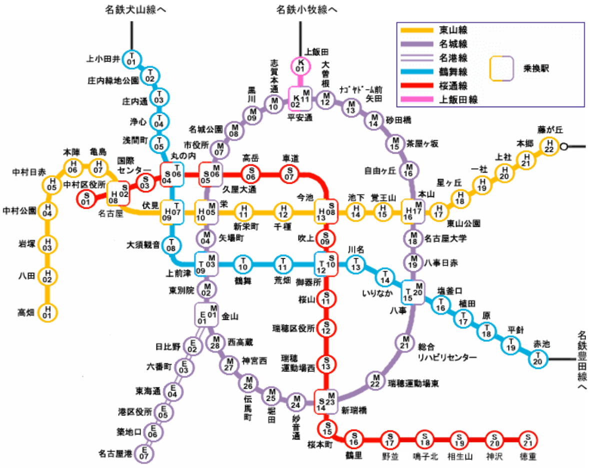
正しい認識

現実世界にはたくさんネットワークと見なせることが存在する

- 「ネットワーク」としてモデル化している
- 「グラフ」はネットワークの数理モデルとして使われる

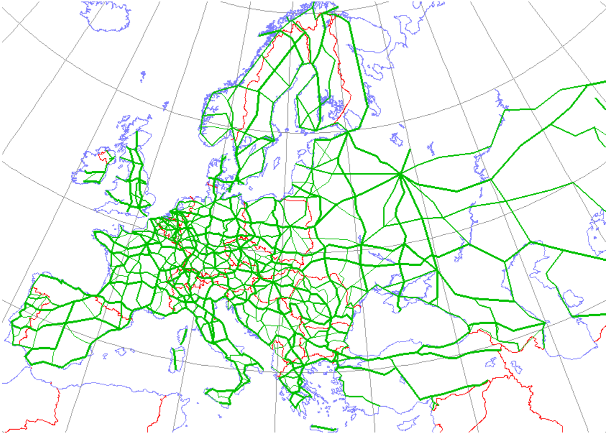
その他の例は今後の講義や他の講義の中で

路線図



http://www.kotsu.city.nagoya.jp/subway/sub_route.html

道路ネットワーク



http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

輸送ネットワーク

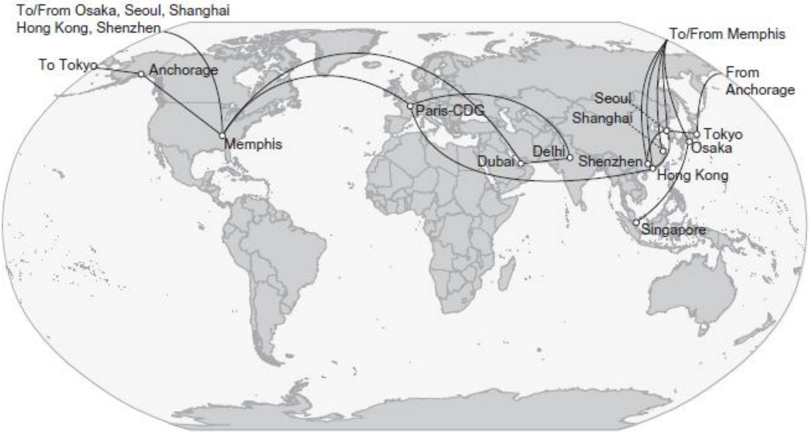
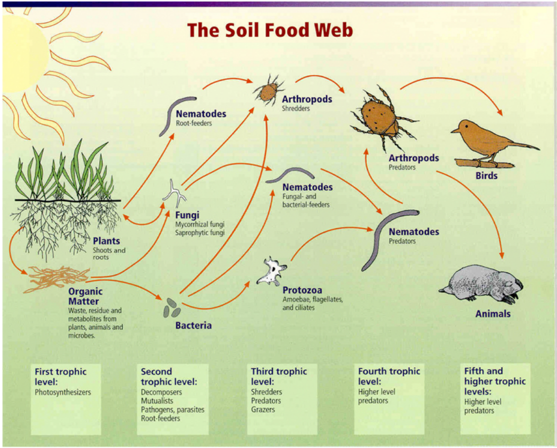


Fig. 8. FedEx Boeing 777-200LRF direct lanes. *Source:* FedEx (2011b).

J. T. Bowen Jr. (2012), J. Trans. Geography, 24, pp. 419–431

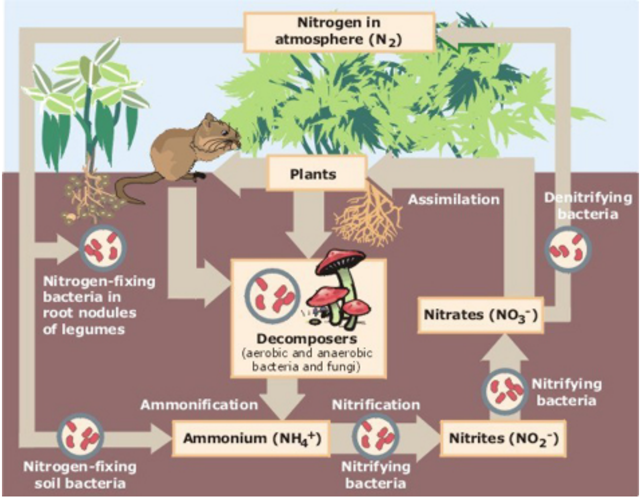
食物網



Relationships between soil food web, plants, organic matter, and birds and mammals
Image courtesy of USDA Natural Resources Conservation Service
http://soils.usda.gov/sqi/soil_quality/soil_biology/soil_food_web.html.

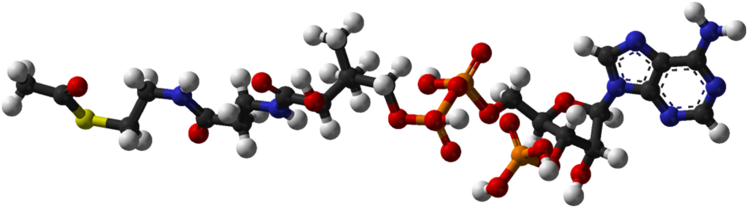
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soil_food_webUSDA.jpg

窒素循環



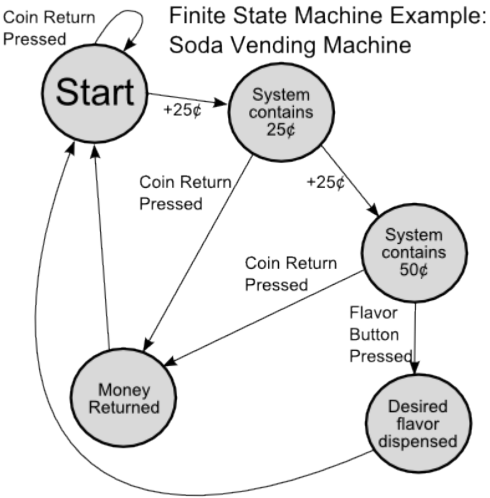
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nitrogen_Cycle.jpg

分子模型



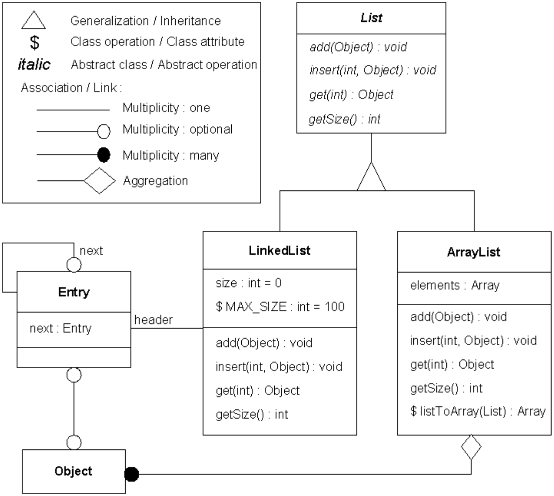
https://en.wikipedia.org/wiki/Acetyl-CoA

状態遷移図



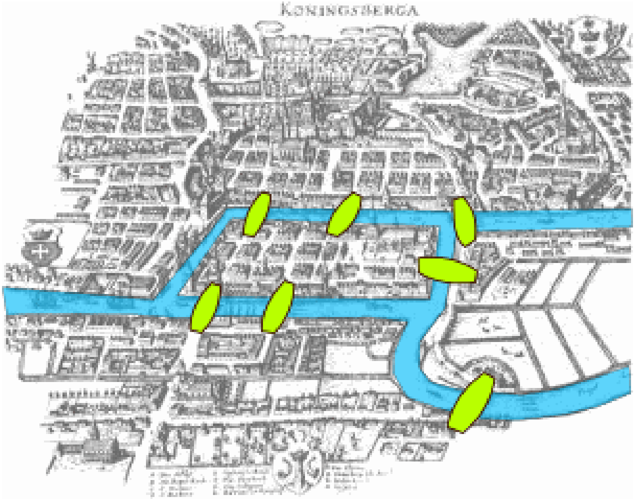
http://automatown.org/automata

オブジェクトモデル図



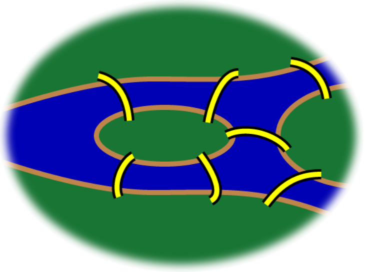
http://en.wikipedia.org/wiki/File:OMT_object_diagram.png

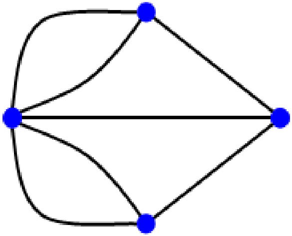
ケーニヒスベルクの橋の問題 (オイラー，1735 年)



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png

ケーニヒスベルクの橋の問題：続き





http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

紹介した例に共通すること (再掲)

間違った認識

現実世界にはたくさんネットワークが存在する

正しい認識

現実世界にはたくさんネットワークと見なせることが存在する

- 「ネットワーク」としてモデル化している
- 「グラフ」はネットワークの数理モデルとして使われる

その他の例は今後の講義や他の講義の中で

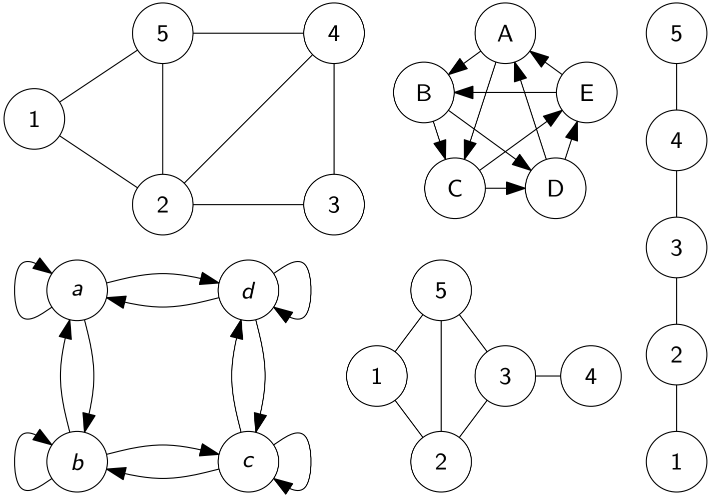
目次

概要

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 (V, A) で，

- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：

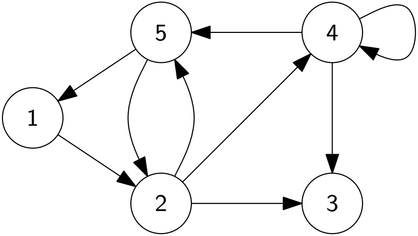
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$ (順序対では順序が大事)

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2)\}$



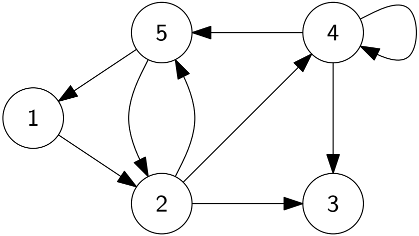
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- A の要素を G の**弧**と呼ぶ
- A を G の**弧集合**と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその**始点**であり，v はその**終点**である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2,3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2,3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

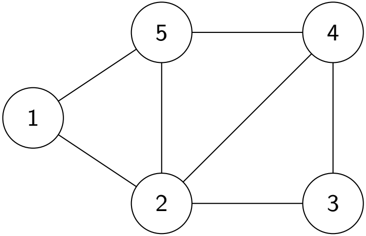
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



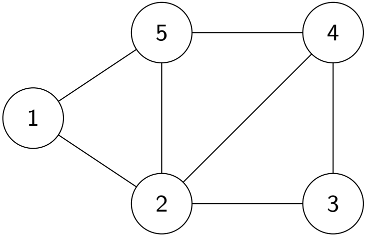
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

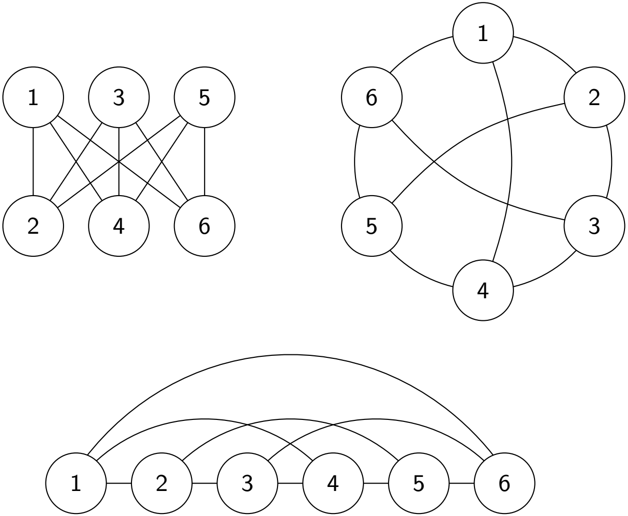
無向グラフの用語

- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
  $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示



用語に関する注意

有向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「弧」の別名：「辺」,「有向辺」,「アーク」,「エッジ」

無向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「辺」の別名：「無向辺」,「エッジ」

目次

数え上げ

数え上げ (counting) とは？

数を計算すること

なぜ数え上げが重要なのか？

- 数を計算すること自体が目的である
- 数を計算することによって，他の目的を達成する
  - 離散数学においては「数え上げによる証明」

記法：有限集合の要素数

有限集合 A の要素数を $|A|$ と書く (これを A のサイズとも呼ぶ)

例：$|\{1,3,4\}| = 3$， $|\emptyset| = 0$

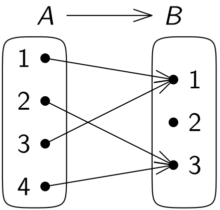
復習：全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

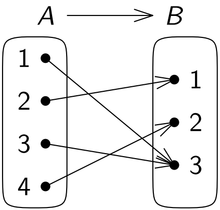
全射とは？

f が**全射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{すべての } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



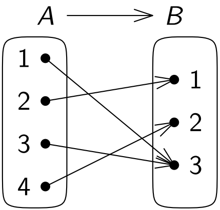
全射である

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

f が全射 $\quad \Rightarrow \quad |A| \geq |B|$



全射である

A \ B	1	2	3
1			1
2	1		
3			1
4		1	

この行列の成分和

格言

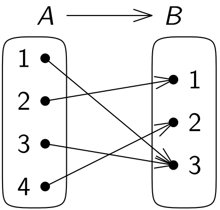
「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

f が全射 $\quad \Rightarrow \quad |A| \geq |B|$



全射である

A \ B	1	2	3	
1			1	$= 1$
2	1			$= 1$
3			1	$= 1$
4		1		$= 1$

$|A| =$ この行列の成分和

格言

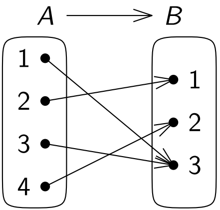
「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

$$f \text{ が全射} \quad \Rightarrow \quad |A| \geq |B|$$



全射である

$$\begin{array}{c|c|c|c|l} A \backslash B & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & & & 1 & = 1 \\ 2 & 1 & & & = 1 \\ 3 & & & 1 & = 1 \\ 4 & & 1 & & = 1 \\ \hline & \geq 1 & \geq 1 & \geq 1 & \end{array}$$

$|A| =$ この行列の成分和 $\geq |B|$

格言

「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． $\square$

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する.

- $|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので,

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対して, } |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$$

- したがって, $|A| \geq |B|$ である. □

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対して，} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$$

- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である．□

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対して，} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$$

- したがって，

$$|\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は全射なので，

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，} |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq 1$$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． □

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- $|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- f は関数なので，

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対して，} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1$$

- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

- f は全射なので，

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，} |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq 1$$

- したがって，

$$|\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

- したがって，$|A| \geq |B|$ である． □

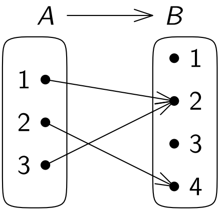
復習：単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

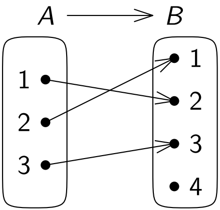
単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{すべての } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad a \neq a' \text{ ならば } f(a) \neq f(a')$$



単射ではない



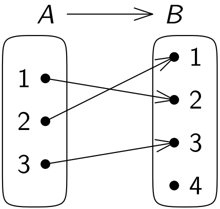
単射である

数え上げと単射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射の性質

f が**単射** $\quad\Rightarrow\quad |A| \leq |B|$



単射である

A \ B	1	2	3	4
1		1		
2	1			
3			1	

この行列の成分和

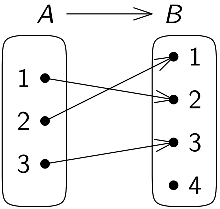
証明の詳細は演習問題

数え上げと単射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射の性質

$$f \text{ が単射} \quad \Rightarrow \quad |A| \le |B|$$



単射である

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
A \backslash B & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & & 1 & & & = 1 \\
2 & 1 & & & & = 1 \\
3 & & & 1 & & = 1
\end{array}$$

$|A| =$ この行列の成分和

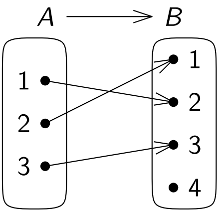
証明の詳細は演習問題

数え上げと単射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射の性質

f が**単射** $\quad\Rightarrow\quad |A| \le |B|$



単射である

$$\begin{array}{c|cccc|l}
{}_{A}\,{}^{B} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & & 1 & & & =1 \\
2 & 1 & & & & =1 \\
3 & & & 1 & & =1 \\
\hline
 & \le 1 & \le 1 & \le 1 & \le 1 &
\end{array}$$

$|A| =$ この行列の成分和 $\le |B|$

証明の詳細は演習問題

目次

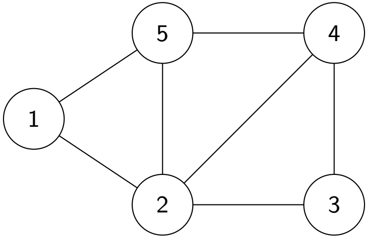
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の**次数**とは，v に接続する辺の数のこと

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid \exists\, u \in V\ (e = \{u, v\})\}|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

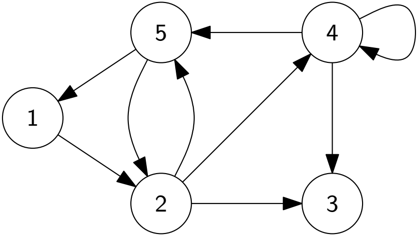
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の入次数とは，v を終点とする弧の数のこと

$$\deg^-_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (u, v))\}|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

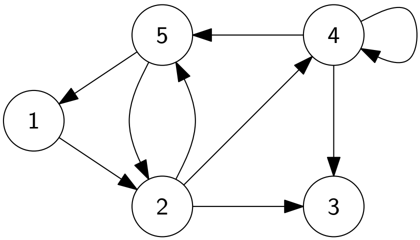
有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ の出次数とは，v を始点とする弧の数のこと

$$\deg^+_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\ u \in V\ (a = (v, u))\}|$$



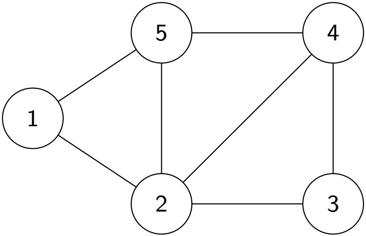
- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

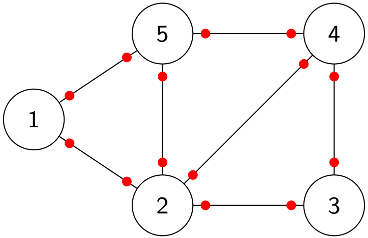
握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- $|E| = 7$

握手補題の証明：準備 (直感)



- G の各頂点の周りを見て，
  接続する辺の上に石を置く
- 石の総数を計算する

数え方 1

- 頂点 v の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{v \in V} \deg_G(v)$

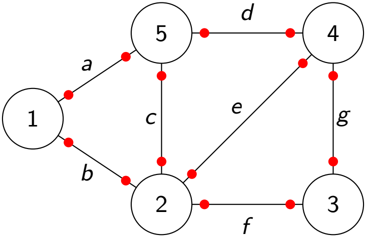
数え方 2

- 各辺 e の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

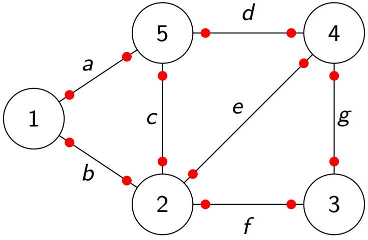
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

握手補題の証明：準備 (行列)



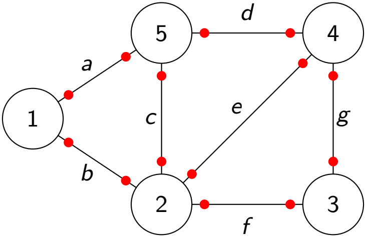
$V \backslash E$	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1					
2		1	1		1	1	
3						1	1
4				1	1		1
5	1		1	1			

握手補題の証明：準備 (行列)



V \ E	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$

握手補題の証明：準備 (行列)



V \ E	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$
	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- $|\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる

- したがって，$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- $|\{(v, e) \in V \times E \mid v$ は e の端点 $\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，

$$
\begin{aligned}
|\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| &= \sum_{v \in V} |\{e \in E \mid v \text{ は } e \text{ の端点 }\}| \\
&= \sum_{v \in V} \deg_G(v)
\end{aligned}
$$

- したがって，$\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- $|\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}|$ を 2 通りの数え方で見てみる
- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので,

$$\begin{aligned} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}| &= \sum_{v \in V} |\{e \in E \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}| \\ &= \sum_{v \in V} \deg_G(v) \end{aligned}$$

- 任意の辺 $e \in E$ に対して，e の端点の数は 2 なので,

$$\begin{aligned} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}| &= \sum_{e \in E} |\{v \in V \mid v \text{ は } e \text{ の端点}\}| \\ &= \sum_{e \in E} 2 = 2|E| \end{aligned}$$

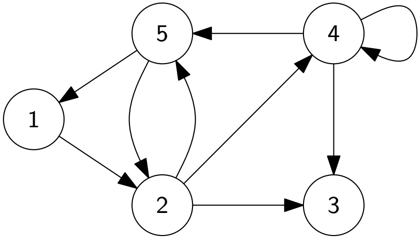
- したがって，$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ $\square$

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$ $= 9$
- $|A| = 9$

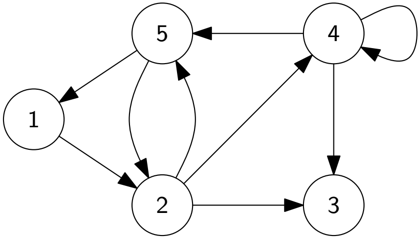
証明：演習問題

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$



- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = 1 + 3 + 0 + 3 + 2$ $= 9$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

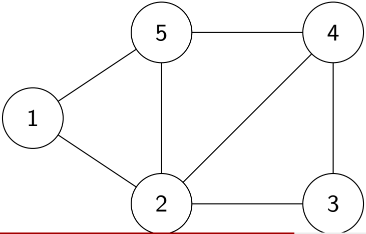
最大次数，最小次数とは？

G の最大次数とは，G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

G の最小次数とは，G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

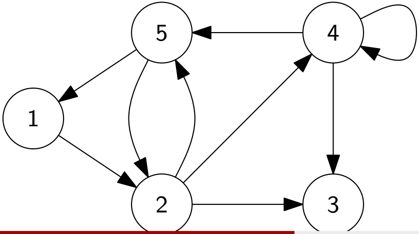
最大入次数，最小入次数とは？

G の最大入次数とは，G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$

G の最小入次数とは，G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

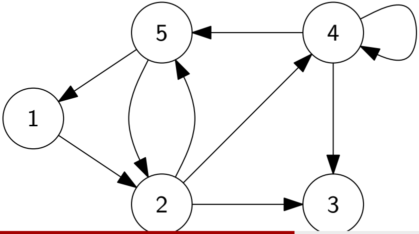
最大出次数，最小出次数とは？

G の**最大出次数**とは，G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小出次数**とは，G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 「最小値 $\leq$ 平均値」なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 「最小値 $\leq$ 平均値」なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.
- 「平均値 $\leq$ 最大値」なので，$\frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$. $\square$

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$

証明：

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$

証明：

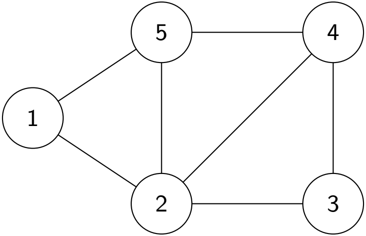
1. v として最大次数を持つ頂点を考えればよい． □
2. v として最小次数を持つ頂点を考えればよい． □

同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G において，ある 2 つの頂点の次数は同じである



$\deg_G(\cdot)$

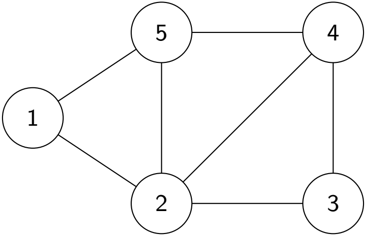
V	0	1	2	3	4
1			1		
2					1
3			1		
4				1	
5				1	

同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G において，ある 2 つの頂点の次数は同じである



$\deg_G(\cdot)$

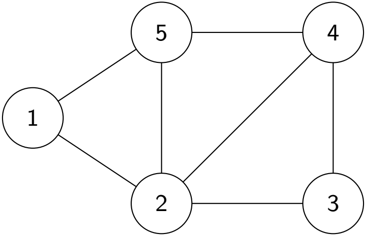
V	0	1	2	3	4	
1			1			$= 1$
2					1	$= 1$
3			1			$= 1$
4				1		$= 1$
5				1		$= 1$

同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G=(V,E)$，$|V|\geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G において，ある 2 つの頂点の次数は同じである



$\deg_G(\cdot)$

V	0	1	2	3	4	
1			1			$=1$
2					1	$=1$
3			1			$=1$
4				1		$=1$
5				1		$=1$
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	

同じ次数を持つ頂点の存在性：補題

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

補題

G には次数 0 の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはない

証明：背理法による

注意

「補題」とは定理を証明するために用いる補助定理のこと

同じ次数を持つ頂点の存在性：補題

無向グラフ $G=(V,E)$, $|V|\geq 2$

補題

G には次数 0 の頂点と次数 $|V|-1$ の頂点が同時に存在することはない

<u>証明</u>：背理法による

- G に次数 0 の頂点 u と次数 $|V|-1$ の頂点 v が同時に存在すると仮定する

注意

「補題」とは定理を証明するために用いる補助定理のこと

同じ次数を持つ頂点の存在性：補題

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

補題

G には次数 0 の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはない

証明：背理法による

- G に次数 0 の頂点 u と次数 $|V| - 1$ の頂点 v が同時に存在すると仮定する
- u の次数は 0 なので，u と v は辺で結ばれていない

注意

「補題」とは定理を証明するために用いる補助定理のこと

同じ次数を持つ頂点の存在性：補題

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

補題

G には次数 0 の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはない

証明：背理法による

- G に次数 0 の頂点 u と次数 $|V| - 1$ の頂点 v が同時に存在すると仮定する
- u の次数は 0 なので，u と v は辺で結ばれていない
- v の次数は $|V| - 1$ なので，v と u は辺で結ばれている

注意

「補題」とは定理を証明するために用いる補助定理のこと

同じ次数を持つ頂点の存在性：補題

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

補題

G には次数 0 の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはない

証明：背理法による

- G に次数 0 の頂点 u と次数 $|V| - 1$ の頂点 v が同時に存在すると仮定する
- u の次数は 0 なので，u と v は辺で結ばれていない
- v の次数は $|V| - 1$ なので，v と u は辺で結ばれている
- この 2 つは互いに矛盾 □

注意

「補題」とは定理を証明するために用いる補助定理のこと

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

となり，矛盾．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

  となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n-1$$

  となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．
- すなわち，G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在する．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- 加えて，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n-1$$

  となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．
- すなわち，G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在する．
- これは補題に矛盾 $\square$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次