

提出締切：2014年4月18日

復習問題 1.1 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が全射ならば、 $|A| \geq |B|$ となることを証明せよ。

復習問題 1.2 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.3 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.4 頂点数が2以上である任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. G において、次数0の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはないことを証明せよ。
2. G において、ある2つの頂点の次数が同じであることを証明せよ。

補足問題 1.5 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が単射ならば、 $|A| \leq |B|$ となることを証明せよ。

補足問題 1.6 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が全単射ならば、 $|A| = |B|$ となることを証明せよ。

補足問題 1.7 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して、以下の2つが成り立つことを証明せよ。

1. $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|$.
2. $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$.

追加問題 1.8 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して、以下の2つが成り立つことを証明せよ。

$$1. \delta^-(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^-(G).$$

$$2. \delta^+(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^+(G).$$

追加問題 1.9

1. 頂点数5の無向グラフで、どの頂点の次数も3であるものは存在するか？(理由も述べよ.)
2. 頂点数6の無向グラフで、どの頂点の次数も3であるものは存在するか？(理由も述べよ.)

追加問題 1.10 頂点数5の有向グラフで、どの頂点の入次数も異なり、かつ、どの頂点の出次数も異なるようなものを1つ見つけよ。(頂点数が任意の自然数 $n \geq 2$ の場合はどうか?)

追加問題 1.11 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし、 $|V| \geq 3$) と、 G において隣接しない2頂点 $u, v \in V$ を考える(すなわち、 $\{u, v\} \notin E$)。このとき、 $\deg_G(u) \geq \frac{|V|-1}{2}$ かつ $\deg_G(v) \geq \frac{|V|-1}{2}$ ならば、 u と v は共通の隣接頂点を持つこと、すなわち、ある $w \in V - \{u, v\}$ が存在して、 $\{u, w\} \in E$ かつ $\{v, w\} \in E$ となることを証明せよ。