離散最適化基礎論 第 13 回
最近のトピック：拡張定式化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

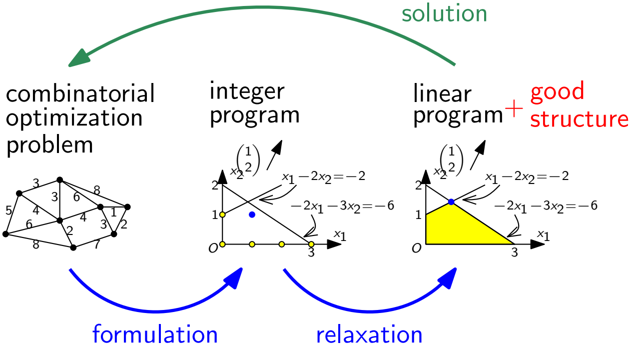
電気通信大学

2015 年 2 月 6 日

最終更新：2015 年 2 月 6 日　11:11

目次

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題
多項式時間解法が存在する

解きにくい問題
NP 困難性が証明されている

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\leadsto$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\leadsto$ 凸多面体の整数性

この講義のねらい：再考

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\leadsto$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

前回と前々回の話

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

前回と前々回の目標

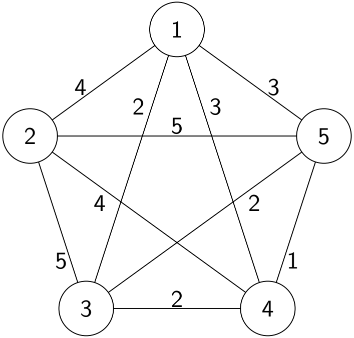
- 多面体構造の「美しくなさ」を定量化する $\rightsquigarrow$ 整数性ギャップ
- 整数性ギャップの解析法を見る (下界と上界)

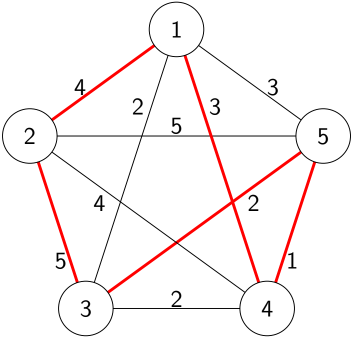
巡回セールスマン問題

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題とは？

G のすべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路 (巡回路) の中で，
その辺重み和が最小のものを見つける問題 (最小化問題)





この巡回路の目的関数値 $= 15$

巡回セールスマン問題の定式化

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題の定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} \quad \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & (\forall\ e \in E), \\
 & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & (\forall\ S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)) \\
 & x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

巡回セールスマン問題の線形計画緩和

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題の線形計画緩和

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e & \\
 & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & (\forall\ e \in E), \\
 & & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & (\forall\ S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)) \\
 & & 0 \leq x_e \leq 1 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

このとき，

$$
\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{\substack{w \geq 0, \\ \text{三角不等式を満たす}}} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}
$$

巡回セールスマン問題の整数性ギャップ

巡回セールスマン問題の定式化 (P) を考える

知られている事実

- 整数性ギャップの下界：

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq \frac{4}{3} - \epsilon \quad (\forall\, \epsilon > 0)$$

- 整数性ギャップの上界：

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq \frac{3}{2}$$

これらが知られている中で最もよい下界と上界

もし次のようなことができたら，どうなるだろうか？

仮定

巡回セールスマン問題に対して，
変数の数と制約の数が (グラフの頂点数に関する) 多項式であるような
線形計画問題としての定式化が存在する

事実

- 線形計画問題は多項式時間で解ける
- 巡回セールスマン問題は NP 困難
  (多項式時間で解けると思われていない)

仮定が成り立つ場合に得られる帰結

巡回セールスマン問題は多項式時間で解ける

ここから「P $=$ NP」であることも結論づけられる

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これは「P = NP」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「P = NP」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「$P = NP$」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Mathematics of Operational Research)

頂点彩色問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Operational Research)

集合分割問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「P = NP」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Mathematics of Operational Research)

頂点彩色問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Operational Research)

集合分割問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$」を導く (ことになるので，正しくない)

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

でも，こう直したら？

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

でも，こう直したら？

(困ったな〜)

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持たない

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持たない

注意

「線形計画定式化を持たない」ということの意味を
厳密に定義する必要あり

目次

拡張定式化

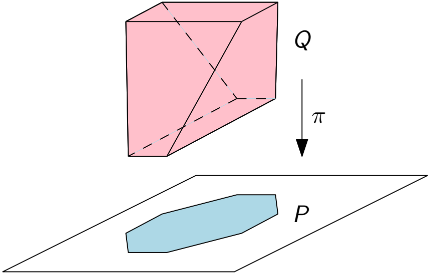
$P \subseteq \mathbb{R}^d$, $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ 凸多面体，$d \leq k$

拡張 (extention) とは？

Q が P の拡張であるとは，ある直射影 $\pi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\pi(Q) = P$$

となること



P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持つ

Yannakakis ('91)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの対称拡張を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持たない

拡張のサイズとは？

ファセットの数 (非冗長不等式表現における不等式の数)

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持つ

Yannakakis ('91)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの対称拡張を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12)

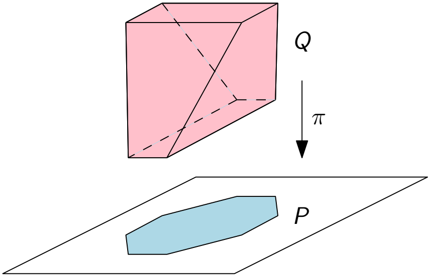
ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持たない

$\rightsquigarrow$ 「拡張のサイズ」に対する興味

拡張のサイズとは？

ファセットの数 (非冗長不等式表現における不等式の数)

拡張



- P のサイズ $= 8$
- Q のサイズ $= 6$

$\rightsquigarrow$ 次元を上げることで，サイズ (ファセット数) が減る場合もある

最適化手法としての拡張定式化

拡張定式化：拡張を用いて，組合せ最適化問題を定式化する

拡張定式化のための一般的手法

- Lift and project (Balas, Ceria, Cornuéjols '93)
- Disjunctive programming (Balas '74, '98)
- ...

組合せ最適化，整数計画法ではよく用いられている

拡張定式化に関するサーベイ

- Balas ('05, Ann. OR)
- Vanderbeck, Wolsey ('10, 50 Yrs of IP)
- Kaibel ('11, Optima)
- Conforti, Cornuéjols, Zambelli ('13 Ann. OR)

目次

偶多面体

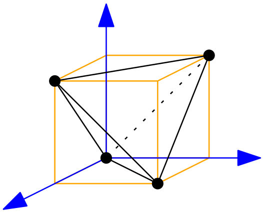
自然数 d

偶多面体 (even polytope) とは？

各座標が 0 か 1 の点で，1 である座標が偶数であるもの全体の凸包

$$\mathrm{EVEN}(d) = \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^d \mid x_1 + \cdots + x_d \equiv 0 \pmod 2\}$$

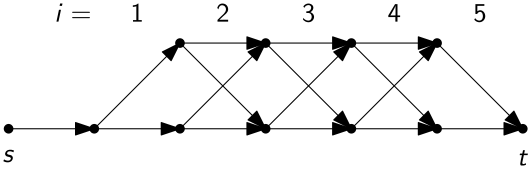
$d = 3$ の場合



偶多面体の拡張 (1)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域が偶多面体の拡張

$d = 5$ のとき

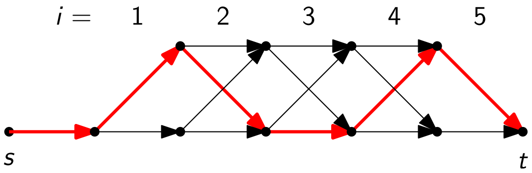


注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 整凸多面体

偶多面体の拡張 (1)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域が偶多面体の拡張

$d = 5$ のとき

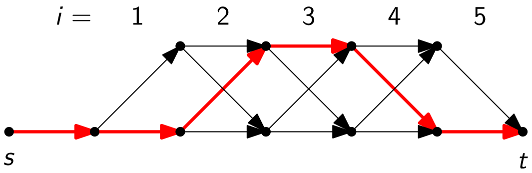


注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 整凸多面体

偶多面体の拡張 (1)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域が偶多面体の拡張

$d = 5$ のとき

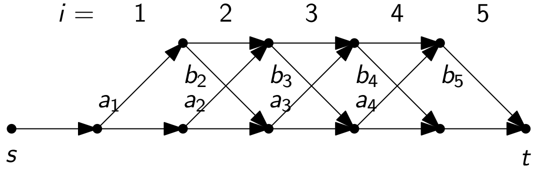


注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 整凸多面体

偶多面体の拡張 (2)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域が偶多面体の拡張

$d = 5$ のとき



$x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 + b_2$, $x_3 = a_3 + b_3$, $x_4 = a_4 + b_4$, $x_5 = b_5$

目次

多面体のスラック行列

多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ の

- V 表現：$P = \mathrm{conv}\{z_1, \ldots, z_n\}$
- H 表現：$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \cdot x \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき，P の**スラック行列**とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

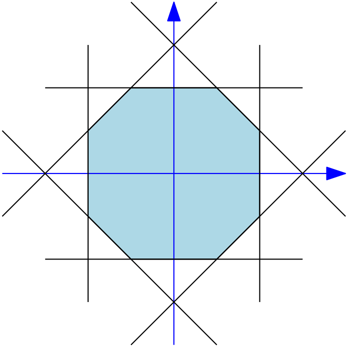
$$S_{i,j} = b_i - a_i \cdot z_j$$

S の行	$\leftrightarrow$	P のファセット
S の列	$\leftrightarrow$	P の頂点

スラック行列：例

8 個の不等式

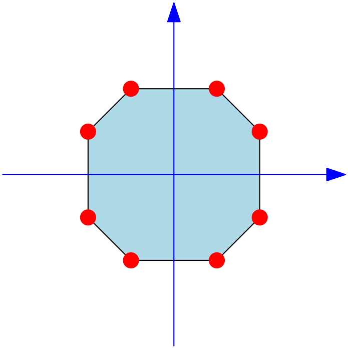
1. $x \leq 2$
2. $-x \leq 2$
3. $y \leq 2$
4. $-y \leq 2$
5. $x + y \leq 3$
6. $x - y \leq 3$
7. $-x + y \leq 3$
8. $-x - y \leq 3$



スラック行列：例

8 個の頂点

1. $(2, 1)$
2. $(2, -1)$
3. $(-2, 1)$
4. $(-2, -1)$
5. $(1, 2)$
6. $(-1, 2)$
7. $(1, -2)$
8. $(-1, -2)$



スラック行列：例

V 表現：$P = \mathrm{conv}\{z_1, \ldots, z_n\}$,
H 表現：$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \cdot x \le b_i \ \forall\ i \in \{1, \ldots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき，P のスラック行列とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

$$S_{i,j} = b_i - a_i \cdot z_j$$

	$(2,1)$	$(2,-1)$	$(-2,1)$	$(-2,-1)$	$(1,2)$	$(-1,2)$	$(1,-2)$	$(-1,-2)$
$x \le 2$	0	0	4	4	1	3	1	3
$-x \le 2$	4	4	0	0	3	1	3	1
$y \le 2$	1	3	1	3	0	0	4	4
$-y \le 2$	3	1	3	1	4	4	0	0
$x + y \le 3$	0	2	4	6	0	2	4	6
$x - y \le 3$	2	0	6	4	4	6	0	2
$-x + y \le 3$	4	6	0	2	2	0	6	4
$-x - y \le 3$	6	4	2	0	6	4	2	0

スラック行列：例

V 表現：$P = \mathrm{conv}\{z_1, \ldots, z_n\}$,
H 表現：$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \cdot x \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき，P のスラック行列とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

$$S_{i,j} = b_i - a_i \cdot z_j$$

	$(2,1)$	$(2,-1)$	$(-2,1)$	$(-2,-1)$	$(1,2)$	$(-1,2)$	$(1,-2)$	$(-1,-2)$
$x \leq 2$	0	0	4	4	1	3	1	3
$-x \leq 2$	4	4	0	0	3	1	3	1
$y \leq 2$	1	3	1	3	0	0	4	4
$-y \leq 2$	3	1	3	1	4	4	0	0
$x + y \leq 3$	0	2	$\boxed{4}$	6	0	2	4	6
$x - y \leq 3$	2	0	6	4	4	6	0	2
$-x + y \leq 3$	4	6	0	2	2	0	6	4
$-x - y \leq 3$	6	4	2	0	6	4	2	0

$$3 - (x + y) = 3 - ((-2) + 1) = 4$$

スラック行列と凸多面体の拡張

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理 (Yannakakis '91; Fiorini, Kaibel, Pashkovich, Theis '13)

次の 2 つは同値

- P はサイズ r の拡張を持つ
- ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

つまり，スラック行列を調べれば，拡張のサイズが分かる

- 実際，ハミルトン閉路多面体に対する拡張の下界も
  スラック行列を通して得られる
  1. 相関多面体の拡張に対する下界をスラック行列を通して得る
  2. ハミルトン閉路多面体をカット多面体の面として埋め込む

行列の階数との類似性

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$

定理 (Yannakakis '91)

次の 2 つは同値

- P はサイズ r の拡張を持つ
- ある <u>非負</u> 行列 $F \in \mathbb{R}^{m\times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r\times n}$ が存在して

$$S = FV$$

線形代数における事実

次の 2 つは同値

- S の階数 $\mathrm{rank}(S)$ が r 以下
- ある行列 $F \in \mathbb{R}^{m\times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r\times n}$ が存在して

$$S = FV$$

行列の非負階数

非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

非負階数とは？

非負行列 S の**非負階数**とは,
ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

となるような，最小の r のこと

S の非負階数を $\mathrm{rank}_+(S)$ で表す

性質

- $\mathrm{rank}_+(S)$ の計算は難しい (NP 困難) (Vavasis '09)
- 任意の定数 k に対して，$\mathrm{rank}_+(S) \leq k$ であるかの判定は $O(nm^{O(k^2)})$ 時間でできる (Moitra '13)

目次

もし次のようなことができたら，どうなるだろうか？ (再掲)

仮定

巡回セールスマン問題に対して，
変数の数と制約の数が (グラフの頂点数に関する) 多項式であるような
線形計画問題としての定式化が存在する

事実

- 線形計画問題は多項式時間で解ける
- 巡回セールスマン問題は NP 困難
  (多項式時間で解けると思われていない)

仮定が成り立つ場合に得られる帰結

巡回セールスマン問題は多項式時間で解ける

ここから「P = NP」であることも結論づけられる

多項式サイズの拡張を持つ組合せ最適化問題，凸多面体

- 二部グラフの最大マッチング (Birkhoff–von Neumann)
- 最大流 (最小カット) (Ford–Fulkerson)
- 全域木 (Martin '91)
- 平面的グラフの最大マッチング (Barahona '93)
- 定数種数グラフの最大マッチング (Gerards '91)
- 比較可能グラフの安定集合 (Yannakakis '91)
- 置換多面体 (Goemans '09)
- 疎性マトロイド (Iwata, Kamiyama, Katoh, Kijima, O. '14)

多項式サイズの拡張を持つ組合せ最適化問題，凸多面体

- 二部グラフの最大マッチング (Birkhoff–von Neumann)
- 最大流 (最小カット) (Ford–Fulkerson)
- 全域木 (Martin '91)
- 平面的グラフの最大マッチング (Barahona '93)
- 定数種数グラフの最大マッチング (Gerards '91)
- 比較可能グラフの安定集合 (Yannakakis '91)
- 置換多面体 (Goemans '09)
- 疎性マトロイド (Iwata, Kamiyama, Katoh, Kijima, O. '14)

これらはすべて多項式時間で解ける組合せ最適化問題
(に付随する凸多面体)

多項式サイズの拡張を持たない組合せ最適化問題，凸多面体

- ハミルトン閉路 (Fiorini ら '12)
- 安定集合 (Fiorini ら '12)
- 最大カット (Fiorini ら '12)
- 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

これらはすべて NP 困難な組合せ最適化問題 (に付随する凸多面体)

多項式サイズの拡張を持たない組合せ最適化問題，凸多面体

- ハミルトン閉路 (Fiorini ら '12)
- 安定集合 (Fiorini ら '12)
- 最大カット (Fiorini ら '12)
- 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

これらはすべて NP 困難な組合せ最適化問題 (に付随する凸多面体)

- マトロイド (Rothvoß '13)
- 最大マッチング (Rothvoß '14)

多項式時間で解ける組合せ最適化問題に付随する凸多面体の
拡張サイズが多項式にならない場合がある

より最近の流れ

拡張定式化と整数性ギャップ

- 整数性ギャップが 1 よりも大きいことを許して，
  そのような線形計画緩和 (の許容領域) の拡張のサイズを考える
- 例えば，Chan, Lee, Raghavendra, Steurer '13

拡張定式化と半正定値計画法

- 半正定値計画法による定式化のサイズ
- 例えば，Lee, Raghavendra, Steurer '15

目次

期末試験

2 月 13 日 (金) 14:40–16:10 @ 西 5–214

- 出題範囲
  - 第 1 回の最初から第 12 回 (前回) の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

残った時間の使い方

- 授業評価アンケート ← 重要
  - 科目番号：8079
  - 科目名：離散最適化基礎論
  - 教員名：岡本 吉央
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次