離散最適化基礎論 第 12 回
整数性ギャップ：上界

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 1 月 23 日

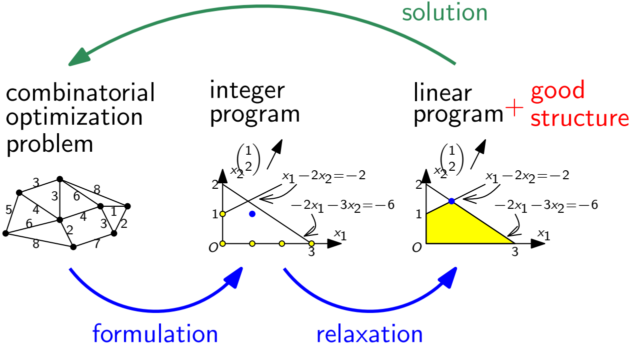
最終更新：2015 年 1 月 23 日　18:16

今日の目標

- 丸め法を用いて整数性ギャップに対する上界を導出する
- 丸め法を用いて近似アルゴリズムを設計する
- 近似比の定義と意味を理解する

目次

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題
多項式時間解法が存在する

解きにくい問題
NP 困難性が証明されている

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に，

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

この講義のねらい：再考

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

前回からの話

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

前回と今回の目標

- 多面体構造の「美しくなさ」を定量化する $\rightsquigarrow$ 整数性ギャップ
- 整数性ギャップの解析法を見る

整数計画問題の線形計画緩和：再掲

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数性ギャップ：最大化問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

整数性ギャップとは？

(P) の**整数性ギャップ**とは次の量

$$\max_{c \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}}$$

これは (P) が
最大化問題であるときの定義

観察

(P) の整数性ギャップ ≥ 1

整数性ギャップ (integrality gap) は整数ギャップとも呼ぶ

整数性ギャップ：最小化問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq b \end{aligned}$$

整数性ギャップとは？

(P) の**整数性ギャップ**とは次の量

$$\max_{c \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}$$

これは (P) が
最小化問題であるときの定義

観察

(P) の整数性ギャップ ≥ 1

前回の内容 と 今回の内容

最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

前回証明した命題

任意の $n \geq 1$ に対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq 2 - \frac{2}{n}$$

を満たすような頂点数 n のグラフが存在する

いまから証明する命題

任意のグラフに対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq 2$$

- この意味で，
  「最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップは 2 に等しい」
  ということがある

目次

整数性ギャップの解析

いろいろな組合せ最適化問題の整数計画定式化 (P) と
その線形計画緩和 (LP) を考えて，
整数性ギャップが何であるか，解析したい

例とする問題

- 最小重み頂点被覆問題

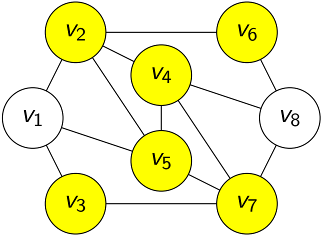
- 前回は下界を証明した
- 今回は上界を証明する

頂点被覆

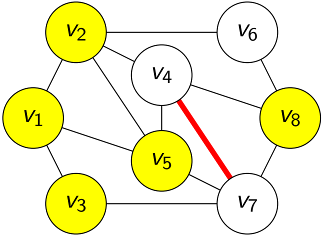
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

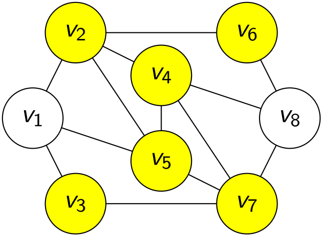
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

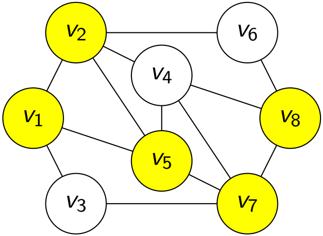
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

最小頂点被覆問題は NP 困難問題　(Karp 1972)

最小重み頂点被覆問題の定式化

無向グラフ $G = (V, E)$，非負頂点重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

最小重み頂点被覆問題の定式化

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{v \in V} w(v) y_v & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in e} y_v \geq 1 & (\forall\ e \in E), \\
& & y_v \in \{0, 1\} & (\forall\ v \in V)
\end{array}
$$

最小重み頂点被覆問題の線形計画緩和

無向グラフ $G = (V, E)$，非負頂点重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

(P) の線形計画緩和

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{v \in V} w(v) y_v & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in e} y_v \geq 1 & (\forall\, e \in E), \\
& & 0 \leq y_v \leq 1 & (\forall\, v \in V)
\end{array}
$$

このとき，

$$
\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}
$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)

最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

命題

任意のグラフに対して,

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq 2$$

証明の方針：任意の重み関数 $w \geq 0$ を考える

- (LP) の最適解を $y^* \in \mathbb{R}^V$ とする
- (P) の許容解 $y' \in \mathbb{R}^V$ を y^* から上手に構成する
- 証明したいこと：

$$\frac{\sum_{v \in V} w(v) y'_v}{\sum_{v \in V} w(v) y^*_v} \leq 2$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)：証明 (1)

任意の重み関数 $w \geq 0$ を考える

- (LP) の最適解を $y^* \in \mathbb{R}^V$ とする
- このとき，次のようにして作られるベクトル $y' \in \mathbb{R}^V$ を考える

$$y'_v = \begin{cases} 0 & (y^*_v < 1/2 \text{ のとき}) \\ 1 & (y^*_v \geq 1/2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明したいこと

1. y' が (P) の許容解であること
2. 次の不等式が成り立つこと

$$\sum_{v \in V} w(v) y'_v \leq 2 \sum_{v \in V} w(v) y^*_v$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)：証明 (2)

証明したいこと

1. y' が (P) の許容解であること

任意の $v \in V$ に対して，$y'_v \in \{0, 1\}$ が成り立つこと

- これは y'_v の構成法からすぐに分かる

任意の $e \in E$ に対して，$\sum_{v \in e} y'_v \geq 1$ が成り立つこと

- 辺 e の端点を u, v とする
- y^* は (LP) の許容解なので，$y^*_u + y^*_v \geq 1$
- すなわち，$\max\{y^*_u, y^*_v\} \geq (y^*_u + y^*_v)/2 \geq 1/2$
- したがって，y'_u か y'_v の少なくともどちらか一方は 1 である
- つまり，$y'_u + y'_v \geq 1$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)：証明 (3)

証明したいこと

2. $\sum_{v \in V} w(v) y'_v \leq 2 \sum_{v \in V} w(v) y^*_v$ が成り立つこと

$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in V} w(v) y'_v &= \sum_{v \in V, y'_v = 1} w(v) && (\because\ y'_v \in \{0,1\}\ \forall\ v \in V) \\
&= \sum_{v \in V, y^*_v \geq 1/2} w(v) && (\because\ y'_v = 1 \Leftrightarrow y^*_v \geq 1/2) \\
&\leq \sum_{v \in V, y^*_v \geq 1/2} w(v) \cdot 2 y^*_v
\end{aligned}
$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)：証明 (4)

証明したいこと

2 $\sum_{v \in V} w(v) y'_v \leq 2 \sum_{v \in V} w(v) y^*_v$ が成り立つこと

$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in V} w(v) y'_v &\leq \sum_{v \in V, y^*_v \geq 1/2} w(v) \cdot 2y^*_v \\
&\leq \sum_{v \in V, y^*_v \geq 1/2} w(v) \cdot 2y^*_v + \sum_{v \in V, y^*_v < 1/2} w(v) \cdot 2y^*_v \\
&\qquad (\because\ w(v) \geq 0, y^*_v \geq 0\ \forall\ v \in V) \\
&= 2 \sum_{v \in V} y^*_v
\end{aligned}
$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (上界)：証明 (5)

- したがって，任意の非負重み関数 $w \geq 0$ に対して，

$$\frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}} \leq \frac{\sum_{v \in V} w(v) y'_v}{\sum_{v \in V} w(v) y^*_v} \leq 2$$

- ゆえに，

$$\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}} \leq 2$$

□

目次

整数性ギャップの上界とアルゴリズム

先ほどの定理の証明では,
(LP) の最適解から (P) の許容解を得るアルゴリズムを与えている

最小重み頂点被覆問題に対する丸め法 (rounding algorithm)

- 入力：最小重み頂点被覆問題の線形計画緩和 (LP) の最適解 $y^* \in \mathbb{R}^V$
- 出力：最小重み頂点被覆問題 (P) の許容解 $y' \in \mathbb{R}^V$

1. y^* から $y' \in \mathbb{R}^V$ を次のように構成

$$y'_v = \begin{cases} 0 & (y^*_v < 1/2 \text{ のとき}) \\ 1 & (y^*_v \geq 1/2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2. y' を出力

これは多項式時間アルゴリズム (y' を効率よく構成できる)

整数性ギャップと近似比

疑問

この y' はどのような性質を持っているのか？

分かっていることの羅列 (注意：(P) と (LP) は最小化問題)

- (P) の最適値 $\leq$ (P) における y' の目的関数値 $= \sum_{v \in V} w(v) y'_v$
- $\sum_{v \in V} w(v) y^*_v =$ (LP) の最適値 $\leq$ (P) の最適値
- $\sum_{v \in V} w(v) y'_v \leq 2 \sum_{v \in V} w(v) y^*_v$ (先ほどの証明に登場)

したがって

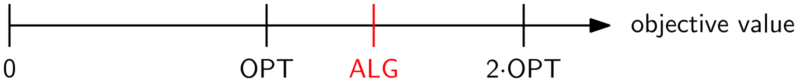
$$
\begin{aligned}
\text{(P) の最適値} &\leq \text{(P) における } y' \text{ の目的関数値} \leq 2 \cdot \text{(LP) の最適値} \\
&\leq 2 \cdot \text{(P) の最適値}
\end{aligned}
$$

図に描いてみる

- ALG : アルゴリズムが出力する (P) の許容解 y' の目的関数値
- OPT : (P) の最適値

先ほどの式は次のように書き換えられる

$$\mathrm{OPT} \leq \mathrm{ALG} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$$



- ALG が任意に大きくなることはできず，
  必ず $2 \cdot \mathrm{OPT}$ 以下で抑えられる

$\rightsquigarrow$ アルゴリズムの出力の「悪さ」を小さくできている

近似比：最小化問題に対して

仮定：考える問題は最小化問題で，任意の許容解の目的関数値が非負

近似比とは？

最小化問題に対する アルゴリズム の近似比とは，

$$\text{最適値} \leq \text{アルゴリズムの出力の目的関数値} \leq \alpha \cdot \text{最適値}$$

が必ず成り立つ最小の α のこと

近似比：approximation ratio, approximation factor

- $\alpha \geq 1$
- $\alpha = 1 \Leftrightarrow$ アルゴリズムは必ず最適解を出力
- α が 1 に近い $\Leftrightarrow$ アルゴリズムの近似精度がよい

近似解：最小化問題に対して

仮定：考える問題は最小化問題で，任意の許容解の目的関数値が非負

α 近似解とは？

最小化問題に対する 許容解 が α 近似解であるとは，

$$\text{最適値} \leq \text{その許容解の目的関数値} \leq \alpha \cdot \text{最適値}$$

が成り立つこと

- $\alpha \geq 1$
- $\alpha = 1 \Leftrightarrow$ その許容解は最適解
- α が 1 に近い $\Leftrightarrow$ その許容解の近似精度がよい

整数性ギャップの上界とアルゴリズム (再掲)

最小重み頂点被覆問題に対する丸め法 (rounding algorithm)

- 入力：最小重み頂点被覆問題の線形計画緩和 (LP) の最適解 $y^* \in \mathbb{R}^V$
- 出力：最小重み頂点被覆問題 (P) の許容解 $y' \in \mathbb{R}^V$

1. y^* から $y' \in \mathbb{R}^V$ を次のように構成

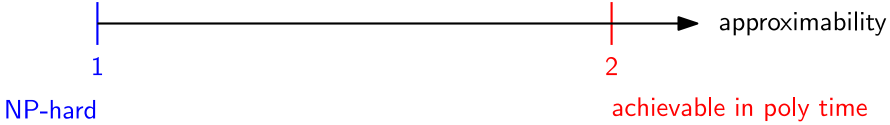
$$y'_v = \begin{cases} 0 & (y^*_v < 1/2 \text{ のとき}) \\ 1 & (y^*_v \geq 1/2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2. y' を出力

結論

- これは多項式時間アルゴリズム (y' を効率よく構成できる)
- このアルゴリズムの近似比は 2 以下

最小重み頂点被覆問題に対して多項式時間でできること



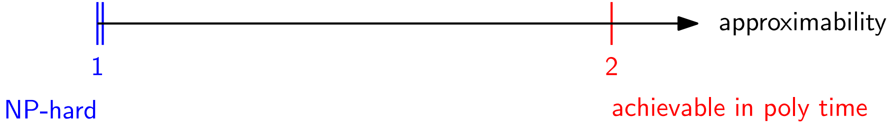
多項式時間で可能

- 2 近似解の発見 (Bar-Yehuda, Even '81; Hochbaum '82)

NP 困難

- 最適解の発見 (Karp '72)

最小重み頂点被覆問題に対して多項式時間でできること



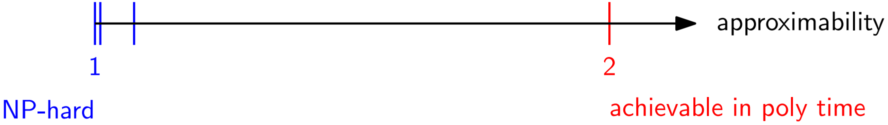
多項式時間で可能

- 2 近似解の発見 (Bar-Yehuda, Even '81; Hochbaum '82)

NP 困難 — 近似不可能性

- 最適解の発見 (Karp '72)
- α 近似解の発見 ($\exists\, \alpha > 1$) (Arora, Lund, Motwani, Sudan, Szegedy '98)

最小重み頂点被覆問題に対して多項式時間でできること



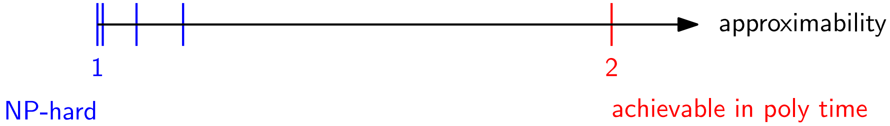
多項式時間で可能

- 2 近似解の発見 (Bar-Yehuda, Even '81; Hochbaum '82)

NP 困難 — 近似不可能性

- 最適解の発見 (Karp '72)
- α 近似解の発見 ($\exists\ \alpha > 1$) (Arora, Lund, Motwani, Sudan, Szegedy '98)
- $\frac{233}{218} - \epsilon$ 近似解の発見 (Bellare, Goldreich, Sudan '98)

最小重み頂点被覆問題に対して多項式時間でできること



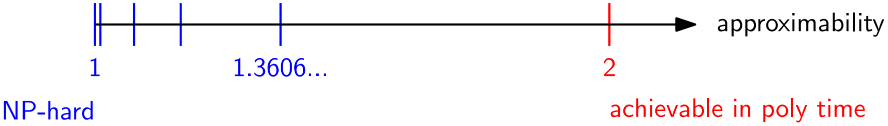
多項式時間で可能

- 2 近似解の発見 (Bar-Yehuda, Even '81; Hochbaum '82)

NP 困難 — 近似不可能性

- 最適解の発見 (Karp '72)
- α 近似解の発見 ($\exists\ \alpha > 1$)
  (Arora, Lund, Motwani, Sudan, Szegedy '98)
- $\frac{233}{218} - \epsilon$ 近似解の発見 (Bellare, Goldreich, Sudan '98)
- $\frac{7}{6} - \epsilon$ 近似解の発見 (Håstad '01)

最小重み頂点被覆問題に対して多項式時間でできること



多項式時間で可能

- 2 近似解の発見 (Bar-Yehuda, Even '81; Hochbaum '82)

NP 困難 — 近似不可能性

- 最適解の発見 (Karp '72)
- α 近似解の発見 ($\exists\, \alpha > 1$) (Arora, Lund, Motwani, Sudan, Szegedy '98)
- $\frac{233}{218} - \epsilon$ 近似解の発見 (Bellare, Goldreich, Sudan '98)
- $\frac{7}{6} - \epsilon$ 近似解の発見 (Håstad '01)
- $10\sqrt{5} - 21 - \epsilon$ 近似解の発見 (Dinur, Safra '05)

近似比：最大化問題に対して

仮定：考える問題は最大化問題で，任意の許容解の目的関数値が非負

近似比とは？

最大化問題に対する アルゴリズム の近似比とは，

$$\frac{1}{\alpha}\cdot \text{最適値} \leq \text{アルゴリズムの出力の目的関数値} \leq \text{最適値}$$

が必ず成り立つ最小の α のこと

- $\alpha \geq 1$
- $\alpha = 1 \Leftrightarrow$ アルゴリズムは必ず最適解を出力
- α が 1 に近い $\Leftrightarrow$ アルゴリズムの近似精度がよい

近似解：最大化問題に対して

仮定：考える問題は最大化問題で，任意の許容解の目的関数値が非負

α 近似解とは？

最大化問題に対する 許容解 が α 近似解であるとは，

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\text{最適値} \leq \text{その許容解の目的関数値} \leq \text{最適値}$$

が成り立つこと

- $\alpha \geq 1$
- $\alpha = 1 \Leftrightarrow$ その許容解は最適解
- α が 1 に近い $\Leftrightarrow$ その許容解の近似精度がよい

最近の研究のトレンド (1)

近似アルゴリズムに関する研究

近似アルゴリズムの設計と解析に関する研究

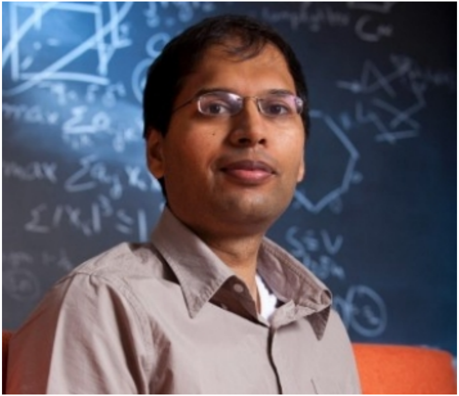
- 線形計画法，半正定値計画法に基づく手法によって，
  よい近似比を持つアルゴリズムが多く設計されている
- その中で，整数性ギャップが重要な役割を果たしている
- 多くの問題に対して，その手法による近似比が知られている中で最良の近似比を与えている

近似不可能性に関する研究

- 1990 年代，確率的検査可能証明 (PCP) と PCP 定理により，
  近似不可能性に関する研究が大きく進展している
- 2000 年代に入り，一意ゲーム予想に基いて
  近似不可能性に関する研究が大きく進展している

最近の研究のトレンド (2)

Subhash Khot：2014 年 Nevanlinna 賞受賞



一意ゲーム予想とその周辺研究に関する貢献に対して

http://www.nyu.edu/about/news-publications/news/2014/08/13/courants-khot-wins-rolf-nevanlinna-prize.html

最近の研究のトレンド (3)

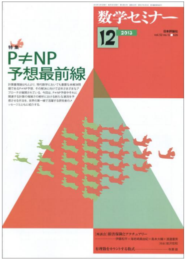
Gödel 賞受賞者一覧

1993	Babai, Goldwasser, Micali, Moran, Rackoff
1994	Håstad
1995	Immerman, Szelepcsényi
1996	Jerrum, Sinclair
1997	Halpern, Moses
1998	Toda
1999	Shor
2000	Vardi, Wolper
2001	Arora, Feige, Goldwasser, Lund, Lovász, Motwani, Safra, Sudan, Szegedy
2002	Sénizergues
2003	Freund, Schapire
2004	Herlihy, Saks, Shavit, Zaharoglou
2005	Alon, Matias, Szegedy
2006	Agrawal, Kayal, Saxena
2007	Razborov, Rudich
2008	Spielman, Teng
2009	Reingold, Vadhan, Wigderson
2010	Arora, Mitchell
2011	Håstad
2012	Koutsoupias, Papadimitriou, Nisan, Ronen, Roughgarden, Tardos
2013	Boneh, Franklin, Joux
2014	Fagin, Lotem, Naor

解説記事

例えば,『数学セミナー』の次のような記事

- 玉置卓,「ネヴァンリンナ賞業績紹介 コート」, 数学セミナー, 2015 年 1 月号, pp. 48–53.
- 岡本吉央,「近似アルゴリズムと数理計画法:最近の進展」, 数学セミナー, 2013 年 12 月号, pp. 23–27.



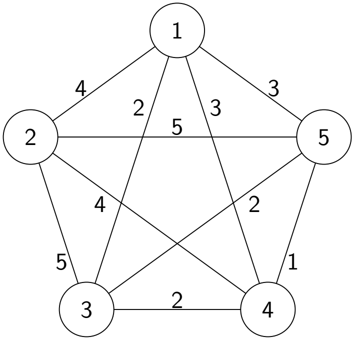
目次

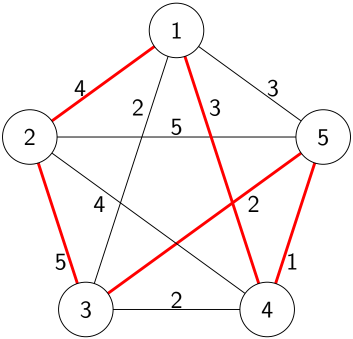
巡回セールスマン問題

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題とは？

G のすべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路 (巡回路) の中で，
その辺重み和が最小のものを見つける問題 (最小化問題)





この巡回路の目的関数値 $= 15$

巡回セールスマン問題の定式化

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題の定式化

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & (\forall\ e \in E), \\
& & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & (\forall\ S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)) \\
& & x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

巡回セールスマン問題の線形計画緩和

完全グラフ $G = (V, E)$，三角不等式を満たす非負辺重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

巡回セールスマン問題の線形計画緩和

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e \\
 & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \qquad (\forall\ e \in E), \\
 & & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \qquad (\forall\ S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)) \\
 & & 0 \leq x_e \leq 1 \qquad (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

このとき，

$$
\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{\substack{w \geq 0, \\ \text{三角不等式を満たす}}} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}
$$

巡回セールスマン問題の整数性ギャップ

巡回セールスマン問題の定式化 (P) を考える

知られている事実

- 整数性ギャップの下界：

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq \frac{4}{3} - \epsilon \quad (\forall\, \epsilon > 0)$$

- 整数性ギャップの上界：

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq \frac{3}{2}$$

これらが知られている中で最もよい下界と上界

頂点数 n が小さい場合の整数性ギャップ

厳密な値

n	整数性ギャップ	著者
3	1	
4	1	
5	1	
6	10/9	Benoit, Boyd (2008)
7	9/8	Benoit, Boyd (2008)
8	8/7	Benoit, Boyd (2008)
9	7/6	Benoit, Boyd (2008)
10	20/17	Benoit, Boyd (2008)
11	19/16	Boyd, Elliott-Magwood (2010)
12	6/5	Boyd, Elliott-Magwood (2010)

予想 (未解決)

巡回セールスマン問題に対する (P) の整数性ギャップ $= \dfrac{4}{3}$

巡回セールスマン問題に対する近似アルゴリズム

注：重み関数は三角不等式を満たす

多項式時間近似アルゴリズム

- 3/2 近似 (Christofides '76)

NP 困難性

- $1 + \delta$ 近似 ($\exists\, \delta > 0$) (Papadimitriou, Yannakakis '93)
- $5381/5380 - \epsilon$ 近似 (Engebretsen '03)
- $3813/3812 - \epsilon$ 近似 (Böckenhauer, Seibert '00)
- $220/219 - \epsilon$ 近似 (Papadimitriou, Vempala '06)
- $185/184 - \epsilon$ 近似 (Lampis '12)
- $123/122 - \epsilon$ 近似 (Karpinski, Lampis, Schmied '13)

目次

今日の目標

今日の目標

- 丸め法を用いて整数性ギャップに対する上界を導出する
- 丸め法を用いて近似アルゴリズムを設計する
- 近似比の定義と意味を理解する

期末試験

2 月 13 日 (金) 14:40–16:10 @ 西 5–214

- 出題範囲
  - 第 1 回の最初から第 12 回 (今回) の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

スケジュール 前半

1. 線形計画問題と整数計画問題 (10/3)
2. 組合せ最適化問題と整数計画問題 (10/10)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/17)
3. 凸多面体の基礎 (10/24)
4. 凸多面体の整数性 (10/31)
5. 双対性の幾何学 (11/7)
6. 完全双対整数性 (11/14)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/21)
7. 完全双対整数性の幾何学 (11/28)

スケジュール 後半

8. 完全双対整数性：ネットワークフロー (12/5)
9. 完全双対整数性：全域木 (1) (12/12)
10. 完全双対整数性：全域木 (2) (12/19)
- ⋆ 冬季休業 (12/26, 1/2)
11. 整数性ギャップ：下界 (1/9)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/16)
12. 整数性ギャップ：上界 (1/23)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/30)
13. 最近のトピック (2/6)
- ⋆ 期末試験 (2/13)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. 前回までの復習
2. 整数性ギャップ：上界
    - 最小重み頂点被覆問題
3. 近似アルゴリズムと近似比
4. 巡回セールスマン問題
5. 今日のまとめ