離散最適化基礎論 第 11 回
整数性ギャップ：下界

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 1 月 9 日

最終更新：2015 年 1 月 9 日　10:44

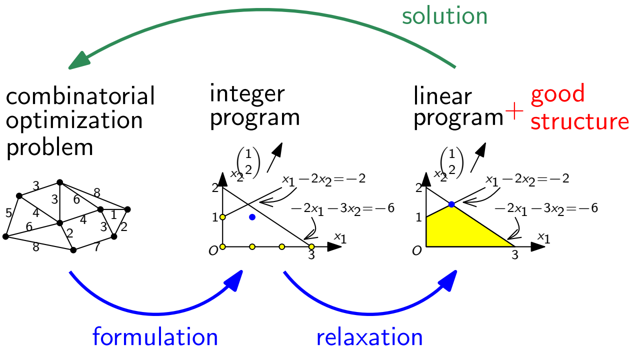
今日の目標

整数性ギャップについて，次を理解する

- 整数性ギャップの定義
- 整数性ギャップの重要性
- 整数性ギャップに対する下界の導出法

目次

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に，

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

この講義のねらい：再考

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

ここからの話

部分的な回答：言い換え

解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

今回と次回の目標

- 多面体構造の「美しくなさ」を定量化する $\rightsquigarrow$ 整数性ギャップ
- 整数性ギャップの解析法を見る

目次

整数計画問題の線形計画緩和：再掲

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

整数性ギャップ：最大化問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \end{aligned}$$

整数性ギャップとは？

(P) の**整数性ギャップ**とは次の量

$$\max_{c \ge 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}}$$

これは (P) が
最大化問題であるときの定義

観察

(P) の整数性ギャップ ≥ 1

整数性ギャップ (integrality gap) は整数ギャップとも呼ぶ

整数性ギャップ：最小化問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b \end{array}$$

整数性ギャップとは？

(P) の**整数性ギャップ**とは次の量

$$\max_{c \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}$$

これは (P) が
最小化問題であるときの定義

観察

(P) の整数性ギャップ ≥ 1

整数性ギャップ：例 (1)

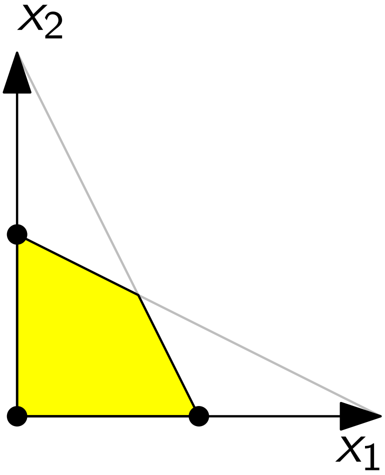
整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & 2x_1 + x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & 2x_1 + x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^2$ は変数，$c \in \mathbb{R}^2$ は定数



整数性ギャップ：例 (2)

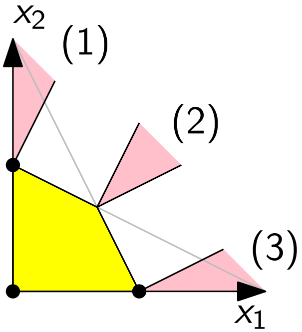
整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

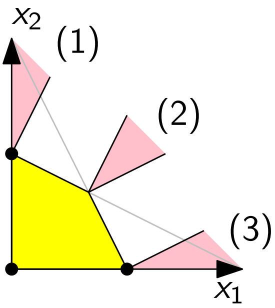
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数，$c \in \mathbb{R}^2$ は定数



$c \in$ 法錐 (1) $\cup$ 法錐 (3) のとき，

$$\frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} = 1$$

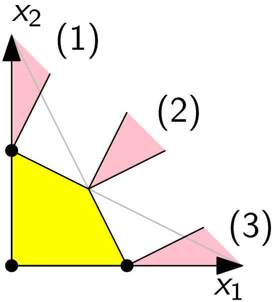
整数性ギャップ：例 (3)



$c \in$ 法錐 (2) のとき，
つまり，ある $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $c^\top = (2-\lambda, 1+\lambda)$ のとき，

$$\frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} = \frac{(2-\lambda)\frac{2}{3} + (1+\lambda)\frac{2}{3}}{\max\{2-\lambda, 1+\lambda\}} = \frac{2}{\max\{2-\lambda, 1+\lambda\}}$$

整数性ギャップ：例 (3)



ここで，$\max\{2-\lambda, 1+\lambda\}$ は $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき最小となり，そのとき，

$$\frac{2}{\max\{2-\lambda, 1+\lambda\}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

したがって，

$$\text{(P) の整数性ギャップ} = \frac{4}{3}$$

整数性ギャップ：重要な性質

命題

(LP) の許容領域が整凸多面体 $\Rightarrow$ (P) の整数性ギャップ $= 1$

証明：(LP) の許容領域が整凸多面体であると仮定する

- このとき，任意の $c \geq 0$ に対して，(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- したがって，((P) が最大化問題のときは)

$$\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{c \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} = \max_{c \geq 0} 1 = 1$$

- (P) が最小化問題であるときも同様 □

整数性ギャップの重要性

この意味で，整数性ギャップは
(LP) の許容集合が整凸多面体であることからどれだけ離れているか
という量を表している

目次

整数性ギャップの解析

いろいろな組合せ最適化問題の整数計画定式化 (P) と
その線形計画緩和 (LP) を考えて，
整数性ギャップが何であるか，解析したい

例とする問題

- 最大重みマッチング問題
- 最小重み頂点被覆問題

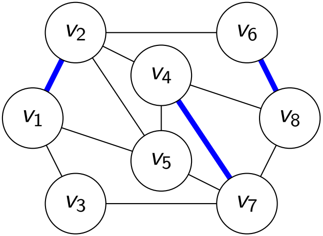
- 今回は下界を証明する
- 次回は上界を証明する

グラフにおけるマッチング

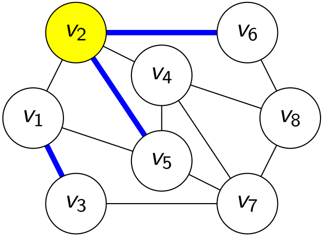
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

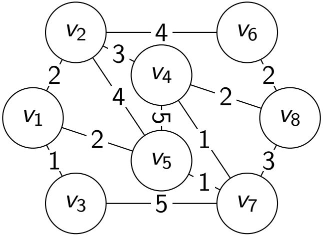
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの

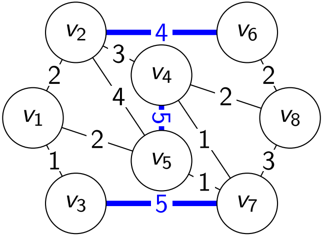


最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

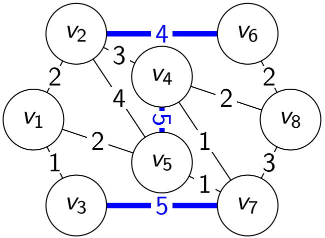
w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの



事実

最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる　(Edmonds, '65)

効率よく $=$ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

最大重みマッチング問題の定式化

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \qquad (\forall\ v \in V), \\
& & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

最大重みマッチング問題の線形計画緩和

(P) の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e) x_e & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 & (\forall\ v \in V), \\
& & 0 \leq x_e \leq 1 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

このとき，

$$
\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}}
$$

最大重みマッチング問題の整数性ギャップ (下界)

最大重みマッチング問題の定式化 (P) を考える

命題

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq \frac{3}{2}$$

を満たすようなグラフが存在する

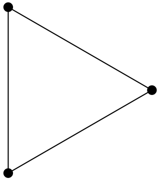
証明の方針

- そのようなグラフを構成すればよい

最大重みマッチング問題の整数性ギャップ (下界)：証明

証明：頂点数 3 の閉路を考える

- すべての辺 $e \in E$ に対して $w(e) = 1$ のときを考える
- 次の 2 つを証明する



1. (P) の最適値 $= 1$
2. (LP) の最適値 $\geq 3/2$

このとき，

$$\begin{aligned}
\text{(P) の整数性ギャップ} &= \max_{w \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} \\
&\geq \frac{w = 1 \text{ のときの (LP) の最適値}}{w = 1 \text{ のときの (P) の最適値}} \\
&\geq \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

最大重みマッチング問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (2)

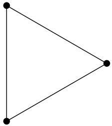
$\boxed{\text{示したいこと (1)}}$：(P) の最適値 $= 1$

- すべての辺 e に対して $w(e) = 1$ なので，
  (P) の最適値は最大マッチングの要素数に等しい
- したがって，(P) の最適値 $= 1$

最大重みマッチング問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (3)

$\boxed{\text{示したいこと (2)}}$：(LP) の最適値 $\geq 3/2$

- (LP) に対する次の許容解 x を考える



$$x_e = 1/2 \qquad (\forall\ e \in E)$$

- これが本当に許容解であることを確認する
  - 頂点 v に接続する 2 辺が e_1, e_2 であるとき

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = x_{e_1} + x_{e_2} = 1/2 + 1/2 = 1 \leq 1$$

- この許容解 x の目的関数値 $= \sum_{e \in E} x_e = 3/2$
- したがって，(LP) の最適値 $\geq$ 許容解 x の目的関数値 $= 3/2$ □

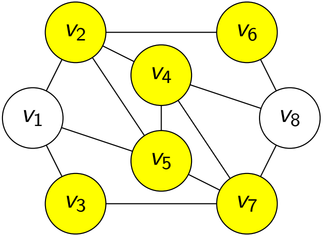
目次

頂点被覆

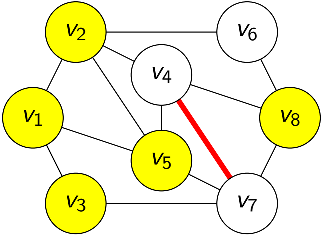
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

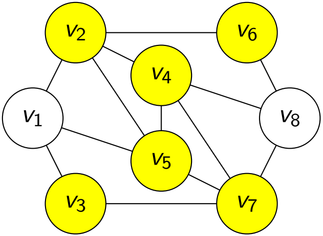
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

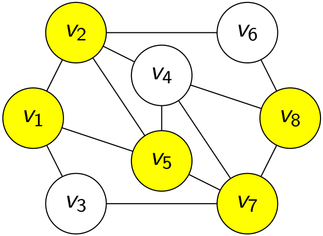
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で,
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

最小頂点被覆問題は NP 困難問題 (Karp 1972)

最小重み頂点被覆問題の定式化

無向グラフ $G = (V, E)$，非負頂点重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

最小重み頂点被覆問題の定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} \quad \text{minimize} & \displaystyle\sum_{v \in V} w(v) y_v & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in e} y_v \geq 1 & (\forall\ e \in E), \\
& y_v \in \{0, 1\} & (\forall\ v \in V)
\end{array}
$$

最小重み頂点被覆問題の線形計画緩和

無向グラフ $G = (V, E)$，非負頂点重み関数 $w\colon V \to \mathbb{R}$

(P) の線形計画緩和

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP)} \quad \text{minimize} & \displaystyle\sum_{v \in V} w(v) y_v & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in e} y_v \geq 1 & (\forall\ e \in E), \\
& 0 \leq y_v \leq 1 & (\forall\ v \in V)
\end{array}
$$

このとき，

$$
\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}
$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)

最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

命題

任意の $n \geq 2$ に対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq 2 - \frac{2}{n}$$

を満たすような頂点数 n のグラフが存在する

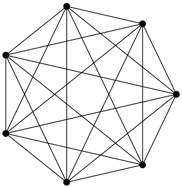
証明の方針

- そのようなグラフを構成すればよい

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明

証明：すべての 2 頂点間に辺があるグラフ (完全グラフ) を考える

- すべての頂点 $v \in V$ に対して $w(v) = 1$ のときを考える
- 次の 2 つを証明する



1. (P) の最適値 $= n - 1$
2. (LP) の最適値 $\leq n/2$

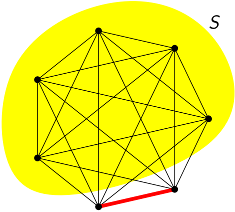
このとき，

$$
\begin{aligned}
\text{(P) の整数性ギャップ} &= \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}} \\
&\geq \frac{w = 1 \text{ のときの (P) の最適値}}{w = 1 \text{ のときの (LP) の最適値}} \\
&\geq \frac{n-1}{n/2} = 2 - \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (2)

示したいこと (1)：(P) の最適値 $= n - 1$

- (P) の目的関数値は必ず整数であり，それは頂点被覆の要素数
- 要素数が $n - 2$ 以下の頂点部分集合 S を考えると，
  S に端点を持たない辺が存在する
- つまり，S は頂点被覆ではなく，(P) の最適値 $\geq n - 1$
- 一方，要素数 $n - 1$ の頂点被覆は存在するので，(P) の最適値 $\leq n - 1$
- したがって，(P) の最適値 $= n - 1$



最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (3)

$\boxed{\text{示したいこと (2)}}$：(LP) の最適値 $\leq n/2$

- (LP) に対する次の許容解 y を考える

$$y_v = 1/2 \qquad (\forall\ v \in V)$$

- これが本当に許容解であることを確認する
  - 辺 $e \in E$ の端点が $a, b \in V$ であるとき，

$$\sum_{v \in e} y_v = y_a + y_b = 1/2 + 1/2 = 1 \geq 1$$

- この許容解 y の目的関数値 $= \sum_{v \in V} y_v = n/2$
- したがって，(LP) の最適値 $\leq$ 許容解 y の目的関数値 $= n/2$ □

最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

いま証明した命題

任意の $n \geq 1$ に対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq 2 - \frac{2}{n}$$

を満たすような頂点数 n のグラフが存在する

次回証明する命題

任意のグラフに対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq 2$$

つまり，完全グラフが最も整数性ギャップの大きい例となっている

- この意味で，
  「最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップは 2 に等しい」
  ということがある

目次

今日の目標

今日の目標

整数性ギャップについて，次を理解する

- 整数性ギャップの定義
- 整数性ギャップの重要性
- 整数性ギャップに対する下界の導出法

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次