

離散最適化基礎論 第 10 回  
完全双対整数性：全域木 (2)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 12 月 19 日

最終更新：2014 年 12 月 24 日 13:20

## 今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する

- ▶ 前回は準備
- ▶ 今回、証明

# 目次

- ① 最小費用全域木問題：第 4 の定式化
- ② Kruskal のアルゴリズム
- ③ 最小費用全域木問題と完全双対整数性：証明
- ④ 今日のまとめ

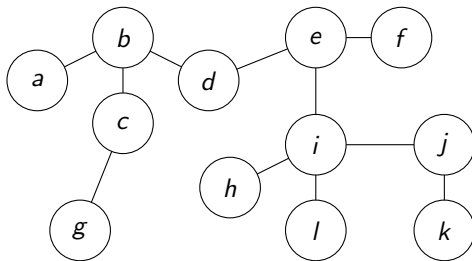
## 木

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 木とは？

 $G$  が木であるとは、次の 2 つの条件を満たすこと

- ▶  $G$  は連結である
- ▶  $G$  は閉路を部分グラフとして含まない



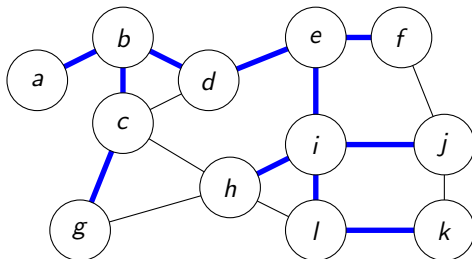
## グラフの全域木

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 全域木とは？

 $G$  の全域木とは、 $G$  の部分グラフで次を満たすもの

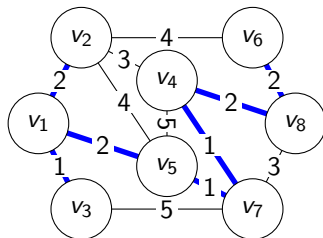
- ▶ 木である
- ▶ 頂点集合が  $V$  である
- ▶ 全張木，生成木とも呼ぶことがある



## 最小費用全域木問題

## 最小費用全域木問題とは？

- ▶ 入力：無向グラフ  $G = (V, E)$ , 非負辺費用関数  $c: E \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ 出力： $G$  の全域木で、費用が最小のもの



## 事実

最小費用全域木問題は効率よく解くことができる (Kruskal '56, Prim '57)

効率よく =  $|V|$  と  $|E|$  に関する多項式時間で

## 全域木の性質

## 木であるための必要十分条件

無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、次の 3 つは同値

- 1  $G$  は閉路を含まない、かつ、 $G$  は連結である (つまり、 $G$  は木である)
- 2  $G$  は閉路を含まない、かつ、 $|E| = |V| - 1$  である
- 3  $G$  は連結である、かつ、 $|E| = |V| - 1$  である

- ▶ 定式化 1 は 1 に基づいている
- ▶ 定式化 2 は 2 に基づいて行う
- ▶ 定式化 3 は 3 に基づいて行う
- ▶ 定式化 4 は 2 に基づいて行うが、1 つ観察を用いる

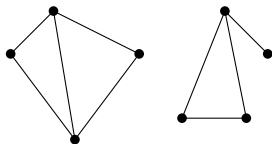
証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

## 用いる観察

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

観察

(証明は演習問題)

 $|E| \geq |V| \Rightarrow G$  は閉路を含む



## 補題

## 補題

無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、次の 2 つは同値

- 2  $G$  は閉路を含まない、かつ、 $|E| = |V| - 1$  である
- 4  $|E(S)| \leq |S| - 1$  がすべての  $S \subseteq V$  ( $S \neq \emptyset, V$ ) に対して成り立つ、  
かつ、 $|E| = |V| - 1$  である

ただし、 $E(S)$  は  $S$  に両端点を持つ  $G$  の辺全体の集合

証明：  $G$  において、 $|E| = |V| - 1$  が成り立つと仮定する

- ▶  $G$  が閉路を含むと仮定する (その閉路を  $C$  とする)
- ▶  $C$  の頂点集合を  $S$  とすると、 $S \neq \emptyset$
- ▶ このとき、 $|E(S)| \geq C$  の辺数  $= |S|$
- ▶ 一方、 $|E(V)| = |E| = |V| - 1 < |V|$  なので、 $S \neq V$
- ▶ したがって、ある  $S \subseteq V$  (ただし、 $S \neq \emptyset, V$ ) に対して、  
 $|E(S)| > |S| - 1$

## 補題：証明の続き

## 補題

無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、次の 2 つは同値

- 2  $G$  は閉路を含まない、かつ、 $|E| = |V| - 1$  である
- 4  $|E(S)| \leq |S| - 1$  がすべての  $S \subseteq V$  ( $S \neq \emptyset, V$ ) に対して成り立つ、  
かつ、 $|E| = |V| - 1$  である

ただし、 $E(S)$  は  $S$  に両端点を持つ  $G$  の辺全体の集合

証明：  $G$  において、 $|E| = |V| - 1$  が成り立つと仮定する

- ▶  $G$  が閉路を含まないと仮定する
- ▶ このとき、 $G$  の部分グラフも閉路を含まない
- ▶ したがって、任意の  $S \subseteq V$  ( $S \neq \emptyset, V$ ) に対して、  
部分グラフ  $G[S] = (S, E(S))$  を考えると、 $G[S]$  も閉路を含まない
- ▶  $\therefore |E(S)| \leq |S| - 1$  □

## 最小費用全域木問題：定式化 4

## 最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

$x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c(e)x_e \\
 & \text{subject to} && \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad (\forall S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)), \\
 & && \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
 & && x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E)
 \end{aligned}$$

これは正しい定式化

## 最小費用全域木問題：定式化 4

## 最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

$x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c(e)x_e \\
 & \text{subject to} && \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad (\forall S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)), \\
 & && \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
 & && x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E)
 \end{aligned}$$

## ここからの目標

定式化 4 の線形計画緩和が整数性を持つことの証明

- ▶ 道具：Kruskal のアルゴリズム

# 目次

- ① 最小費用全域木問題：第 4 の定式化
- ② Kruskal のアルゴリズム
- ③ 最小費用全域木問題と完全双対整数性：証明
- ④ 今日のまとめ

## Kruskal のアルゴリズム

最小費用全域木問題を効率よく解く方法

## Kruskal のアルゴリズム

- 1  $G$  の辺を費用の小さい順に並べる  
( $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$  であると仮定する)
- 2  $T := \emptyset$
- 3 すべての  $i := 1, \dots, m$  に対して、以下を繰り返し

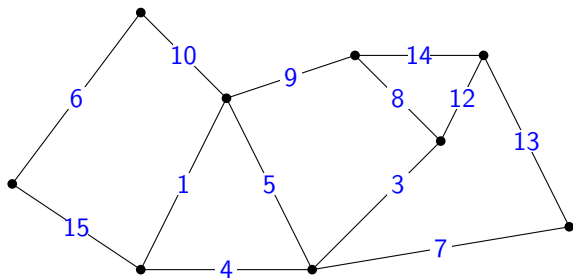
$$T := \begin{cases} T \cup \{e_i\} & (T \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含まないとき}) \\ T & (T \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含むとき}) \end{cases}$$

- 4  $T$  を出力

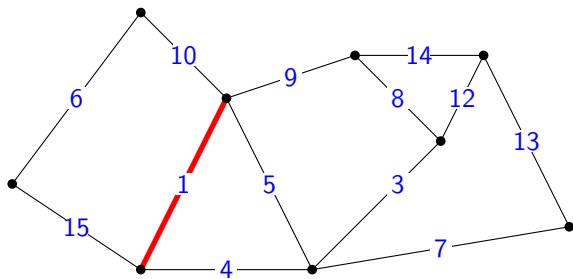
これは正しいアルゴリズム (必ず最小費用全域木を出力する)

- ▶ 証明は『アルゴリズム論第一』か『アルゴリズム論第二』を参照

## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

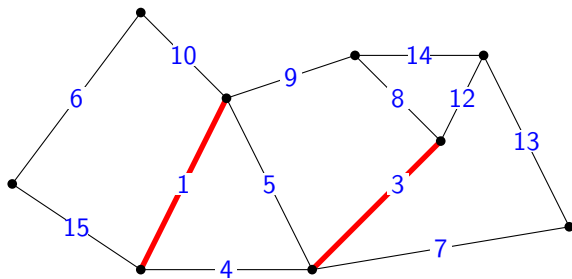


## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

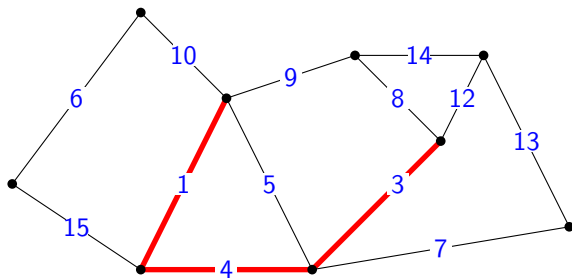




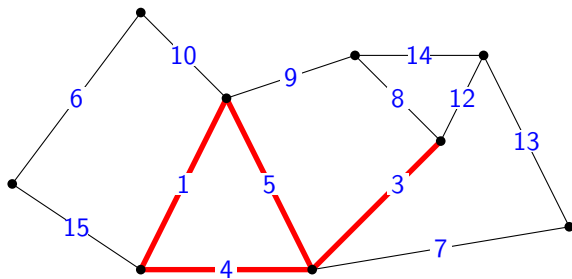
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



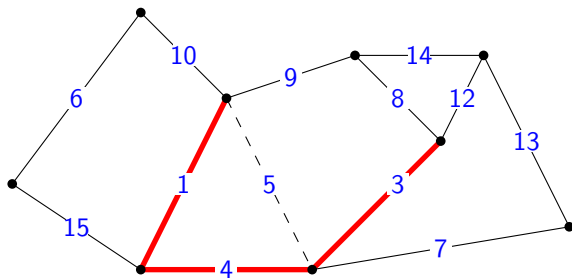
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



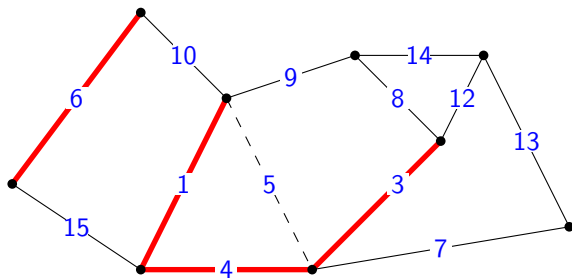
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



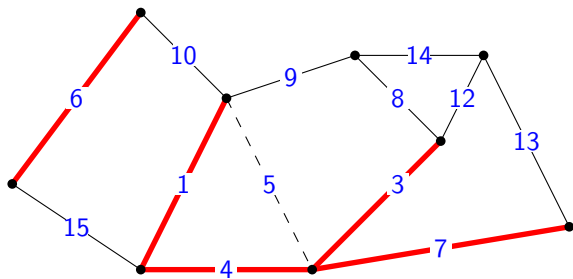
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



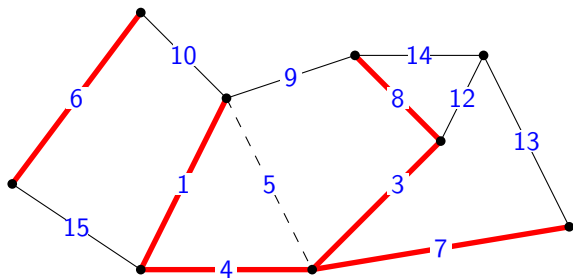
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



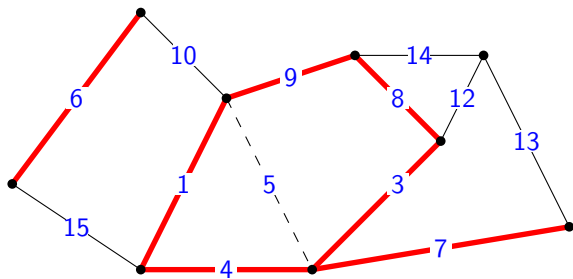
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

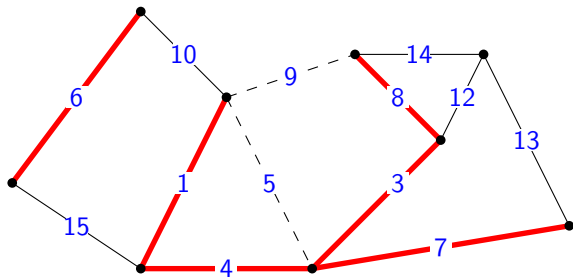


## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

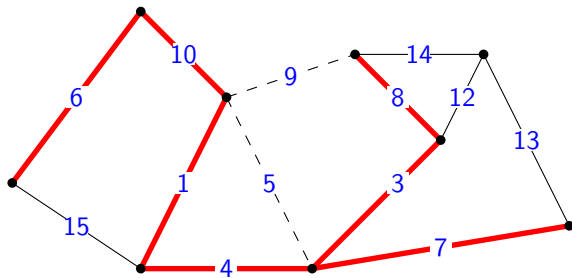




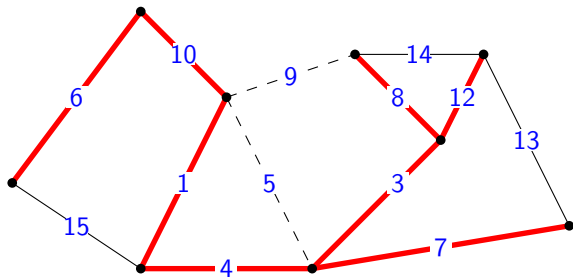
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



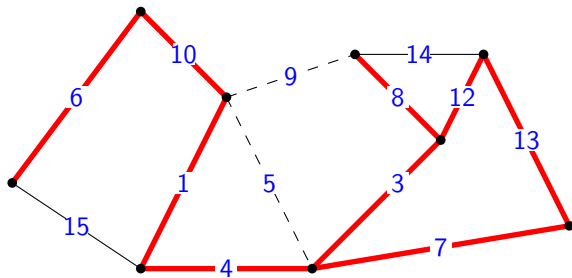
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



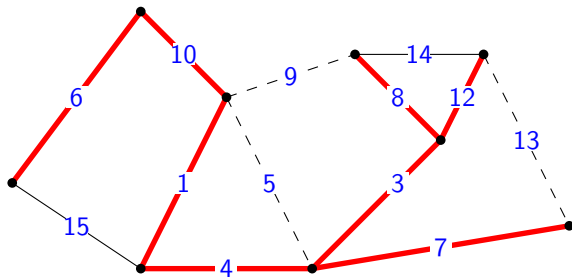
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



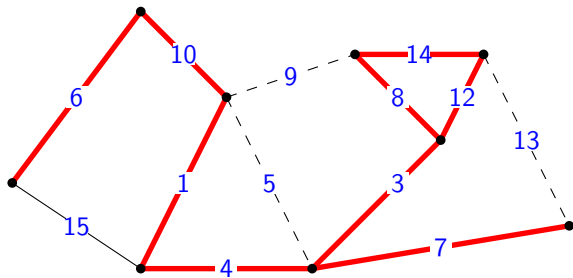
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



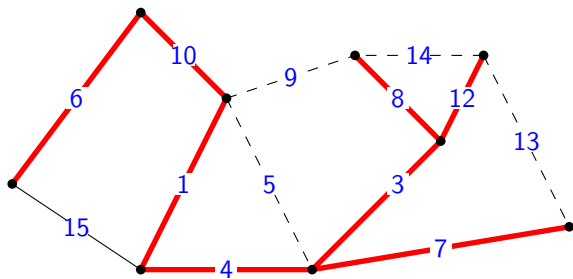
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



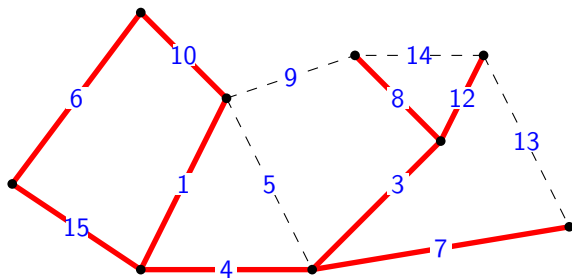
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

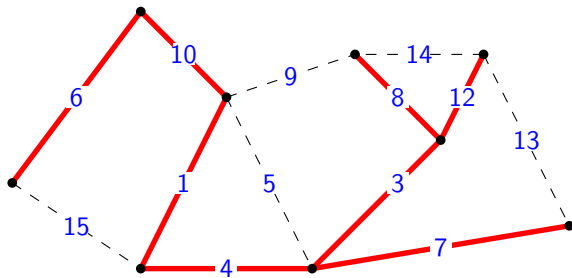


## Kruskal のアルゴリズム : 実行例

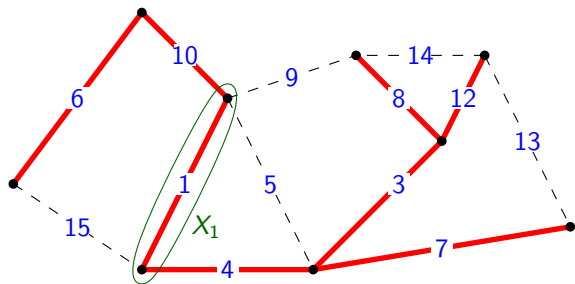




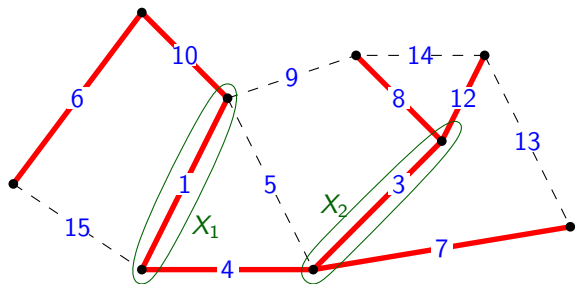
## Kruskal のアルゴリズム : 実行例



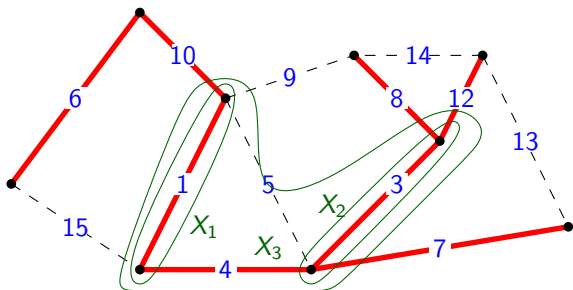
## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



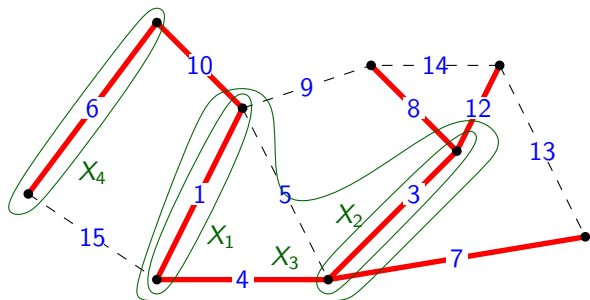
## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



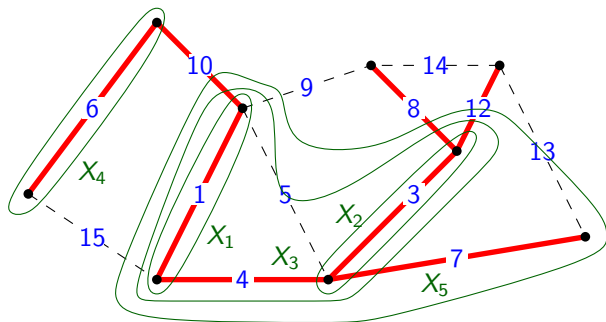
## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



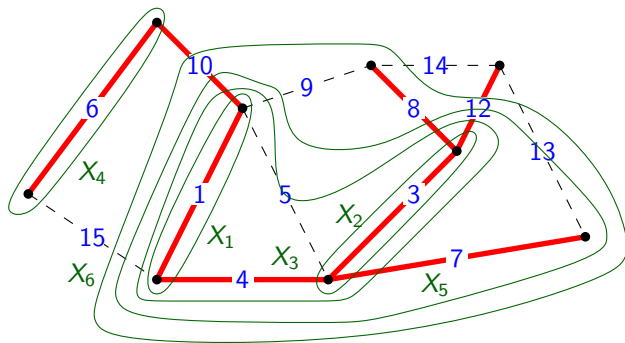
## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



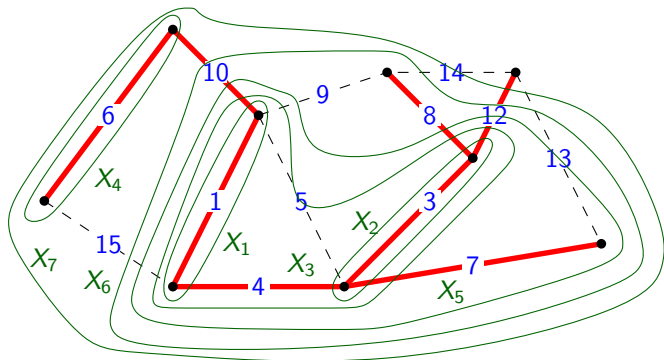
## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)

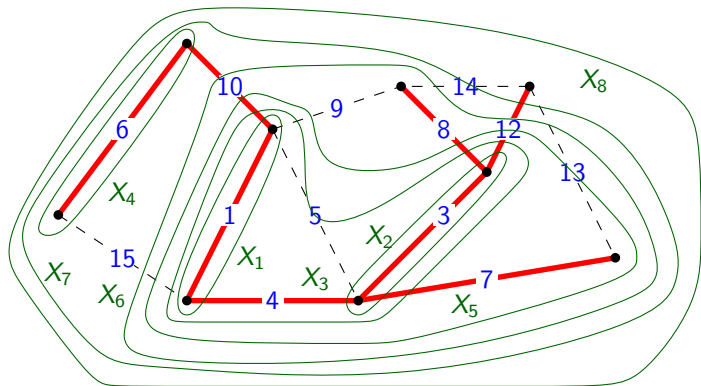


## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)

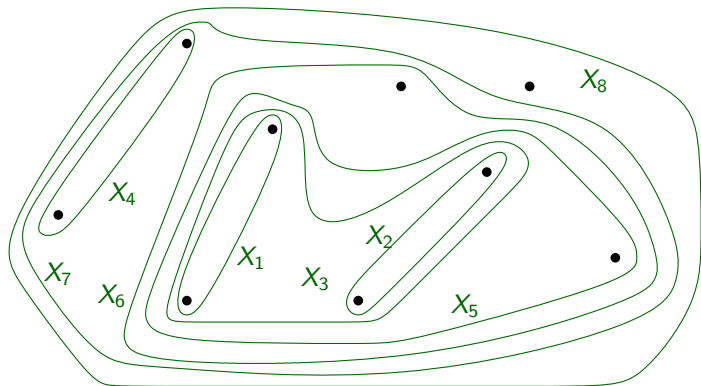




## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



## Kruskal のアルゴリズム : 階層構造 (ラミナ)



# 目次

- ① 最小費用全域木問題：第 4 の定式化
- ② Kruskal のアルゴリズム
- ③ 最小費用全域木問題と完全双対整数性：証明
- ④ 今日のまとめ

## 最小費用全域木問題：定式化 4

## 最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

 $x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c(e)x_e \\
 & \text{subject to} && \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad (\forall S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)), \\
 & && \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
 & && x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E)
 \end{aligned}$$

## ここからの目標

定式化 4 の線形計画緩和が整数性を持つことの証明

- ▶ 道具：Kruskal のアルゴリズム

## 最小費用全域木問題：定式化 4 — 線形計画緩和

## 最小費用全域木問題：定式化 4 の線形計画緩和

 $x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned}
 \text{(LP) minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e)x_e \\
 \text{subject to} \quad & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad (\forall S \subseteq V, (S \neq \emptyset, V)), \\
 & \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
 & 0 \leq x_e \leq 1 \quad (\forall e \in E)
 \end{aligned}$$

## 最小費用全域木問題：定式化 4 — 線形計画緩和の双対問題

## 最小費用全域木問題：定式化 4 の線形計画緩和の双対問題

$y \in \mathbb{R}^{2^V - \{\emptyset, V\}}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned}
 \text{(DLP) maximize} \quad & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_S - (|V| - 1)z - \sum_{e \in E} w_e \\
 \text{subject to} \quad & - \sum_{S: e \subseteq S \subsetneq V} y_S - z - w_e \leq c(e) \quad (\forall e \in E), \\
 & y_S \geq 0 \quad (\forall S \in 2^V - \{\emptyset, V\}), \\
 & w_e \geq 0 \quad (\forall e \in E)
 \end{aligned}$$

復習： $2^V$  は  $V$  の冪集合 (べき集合) で、 $V$  の部分集合全体の集合のこと

## 最小費用全域木問題：定式化 4 — 完全双対整数性の証明の方針

行列  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ , ベクトル  $b \in \mathbb{Z}^m$ , 凸多面体  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

## 完全双対整数性とは？ (再確認)

不等式系  $Ax \leq b$  が**完全双対整数性** (total dual integrality) を持つ, (あるいは, **TDI** (totally dual integral) である) とは, 任意の  $c \in \mathbb{Z}^n$  に対して, 次の最適化問題が整数最適解を持つこと

$$\begin{aligned} \text{(DLP)} \quad & \text{minimize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

## 証明の方針：実際に, (DLP) の整数最適解を構成する

- 1 (LP) の許容解を, Kruskal のアルゴリズムによって構成する
- 2 (DLP) の整数許容解を, Kruskal のアルゴリズムから構成する
- 3 その2つの目的関数値が一致することを確認する
- 4 弱双対定理から, これらは最適解である

## 完全双対整数性の証明：(LP) の許容解

Kruskal のアルゴリズムを実行

- ▶ 選ばれた  $|V| - 1$  個の辺を，選ばれた順に  $f_1, \dots, f_{|V|-1}$  とする
  - ▶ つまり， $c(f_1) \leq \dots \leq c(f_{|V|-1})$
- ▶ このとき， $x^* \in \mathbb{R}^E$  を次で定義

$$x_e^* = \begin{cases} 0 & (e \notin \{f_1, \dots, f_{|V|-1}\}), \\ 1 & (e \in \{f_1, \dots, f_{|V|-1}\}) \end{cases}$$

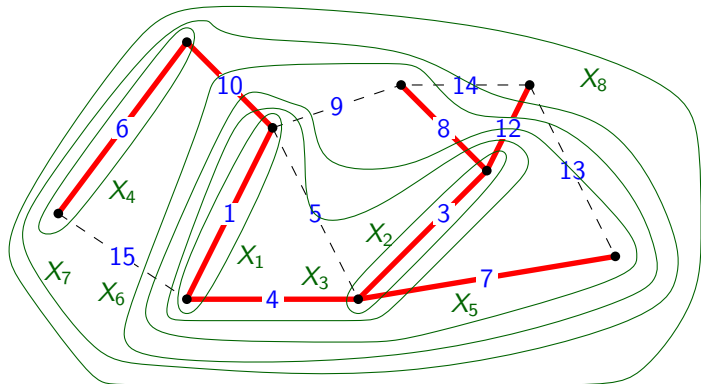
- ▶ この  $x^*$  は (P) の許容解  
( $\because$  Kruskal のアルゴリズムは全域木を出力する)
- ▶ 「(P) の許容集合  $\subseteq$  (LP) の許容集合」なので， $x^*$  は (LP) の許容解



## 完全双対整数性の証明：(DLP) の許容解 — 準備

Kruskal のアルゴリズムを実行

- ▶ 選ばれた  $|V| - 1$  個の辺を，選ばれた順に  $f_1, \dots, f_{|V|-1}$  とする
  - ▶ つまり， $c(f_1) \leq \dots \leq c(f_{|V|-1})$
- ▶  $X_k : (V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の連結成分で  $f_k$  を含むものの頂点集合



## 完全双対整数性の証明：(DLP) の許容解

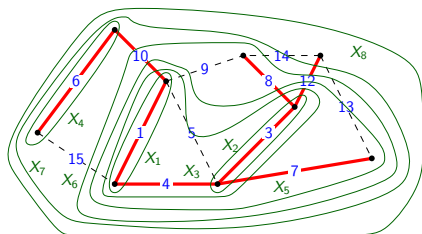
$y^* \in \mathbb{R}^{2^V - \{0, V\}}$ ,  $z^* \in \mathbb{R}$ ,  $w^* \in \mathbb{R}^E$  を次で定義

$$y_S^* = \begin{cases} c(f_{\ell(k)}) - c(f_k) & (\text{ある } k \text{ に対して, } S = X_k \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外するとき}), \end{cases}$$

ただし,  $\ell(k) = \min\{i > k \mid f_i \in \delta(X_k)\}$

$$z^* = -c(f_{|V|-1})$$

$$w_e^* = 0 \quad (\forall e \in E)$$

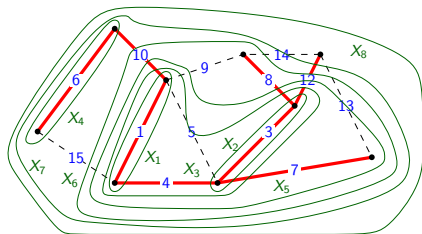


注 :  $c(e)$  がすべての  $e \in E$  に対して整数  $\Rightarrow y^*, z^*, w^*$  も整数 (ベクトル)

## 完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (1)

$y_S^* \geq 0$  が成り立つのはなぜか？

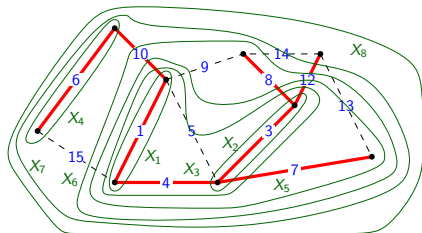
- ▶ ある  $k$  に対して、 $S = X_k$  である場合のみ考える
- ▶ このとき、 $y_S^* = c(f_{\ell(k)}) - c(f_k)$  で、 $\ell(k) = \min\{i > k \mid f_i \in \delta(X_k)\}$
- ▶ つまり、 $\ell(k) > k$  なので、  
Kruskal のアルゴリズムにおいて、 $f_{\ell(k)}$  は  $f_k$  よりも後に追加された
- ▶  $\therefore c(f_{\ell(k)}) \geq c(f_k)$
- ▶  $\therefore y_S^* = c(f_{\ell(k)}) - c(f_k) \geq 0$



## 完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2)

もう1つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- ▶  $X_1, \dots, X_{|V|-2}$  のどれが  $e \in E$  を含むか考える
- ▶  $e$  を含むものは「包含関係の鎖」を作る  
つまり、ある  $k_1 < k_2 < \dots < k_i$  が存在して、  
 $e \subseteq X_{k_1} \subseteq X_{k_2} \subseteq \dots \subseteq X_{k_i}$  となり、  
任意の  $k \notin \{k_1, \dots, k_i\}$  に対して、 $e \not\subseteq X_k$



費用9の辺を  $e$  とすると、 $e \subseteq X_6 \subseteq X_7 \subseteq X_8$

## 完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう1つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

▶ このとき、

$$y_{X_{k_1}}^* = c(f_{k_2}) - c(f_{k_1})$$

$$y_{X_{k_2}}^* = c(f_{k_3}) - c(f_{k_2})$$

$$\vdots$$

$$y_{X_{k_i}}^* = c(f_{|V|-1}) - c(f_i)$$

▶ つまり、
$$\sum_{S: e \subseteq S \subset V} y_S^* = \sum_{j=1}^i y_{X_{k_j}}^* = c(f_{|V|-1}) - c(f_{k_1})$$

## 完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう1つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

▶ つまり,

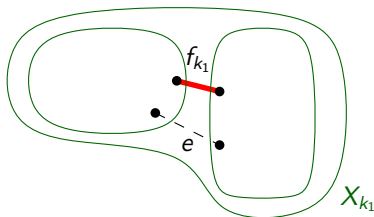
$$- \sum_{S: e \subseteq S \subsetneq V} y_S^* - z^* - w_e^* = -c(f_{|V|-1}) + c(f_{k_1}) + c(f_{|V|-1}) - 0 = c(f_{k_1})$$

- ▶ ここで,  $c(f_{k_1}) \leq c(e)$  であることを導く
- ▶  $f_{k_1} = e$  ならば  $c(f_{k_1}) = c(e)$
- ▶ よって,  $f_{k_1} \neq e$  と仮定する

## 完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう1つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- ▶ まず、 $e \subseteq X_{k_1}$  であり、 $f_{k_1} \subseteq X_{k_1}$  である
- ▶ Kruskal のアルゴリズムの動作から、部分グラフ  $(V, \{f_1, \dots, f_{k_1-1}\})$  において、 $f_{k_1}$  の両端点は異なる連結成分に含まれる
- ▶  $X_{k_1}$  は  $e$  を含む最小の  $X_k$  だから、 $e$  の両端点もその部分グラフの異なる連結成分に含まなければならない
- ▶ つまり、 $X_{k_1}$  に  $e$  を追加しても  $X_k$  が得られていた
- ▶ しかし、Kruskal のアルゴリズムは  $f_{k_1}$  を選び、 $e$  を選ばなかった
- ▶ Kruskal のアルゴリズムの動作から、 $c(f_{k_1}) \leq c(e)$  となる



## 最小費用全域木問題：定式化 4 — 完全双対整数性の証明の方針 (確認)

行列  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ , ベクトル  $b \in \mathbb{Z}^m$ , 凸多面体  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

## 完全双対整数性とは？ (再確認)

不等式系  $Ax \leq b$  が**完全双対整数性** (total dual integrality) を持つ, (あるいは, **TDI** (totally dual integral) である) とは, 任意の  $c \in \mathbb{Z}^n$  に対して, 次の最適化問題が整数最適解を持つこと

$$\begin{aligned} \text{(DLP)} \quad & \text{minimize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

## 証明の方針：実際に, (DLP) の整数最適解を構成する

- 1 (LP) の許容解を, Kruskal のアルゴリズムによって構成する
- 2 (DLP) の整数許容解を, Kruskal のアルゴリズムから構成する
- 3 その2つの目的関数値が一致することを確認する
- 4 弱双対定理から, これらは最適解である



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (1)

まず，次を証明する

## 補題

任意の  $k \in \{1, \dots, |V| - 2\}$  に対して

$$-\sum_{S \subseteq X_k} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_k) \cap F} c(e) - (|X_k| - 1) \cdot c(f_{\ell(k)})$$

ただし， $F = \{f_1, \dots, f_{|V|-1}\}$

証明： $k$  に関する帰納法

- ▶  $k = 1$  のときを考える
- ▶  $|X_1| = 2$  なので， $|X_1| - 1 = 1$
- ▶ 左辺 =  $-(c(f_{\ell(1)}) - c(f_1)) = c(f_1) - c(f_{\ell(1)})$
- ▶ 右辺 =  $c(f_1) - c(f_{\ell(1)})$
- ▶ したがって，左辺 = 右辺

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (2)

証明 (続き)：任意の  $k \geq 1$  を考える

- ▶ 任意の  $k' \leq k$  に対して次が正しいと仮定する

$$- \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) \cdot c(f_{\ell(k')})$$

- ▶ このとき，次を証明する

$$- \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 1) \cdot c(f_{\ell(k+1)})$$

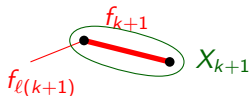
- ▶ 場合分け

- 1  $f_{k+1}$  の両端点が  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき
- 2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき
- 3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (3)

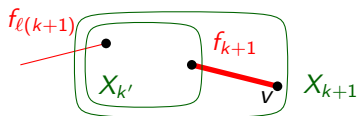
1  $f_{k+1}$  の両端点が  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

- ▶ つまり,  $|X_{k+1}| = 2$
- ▶ 左辺 =  $-(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) = c(f_{k+1}) - c(f_{\ell(k+1)})$
- ▶ 右辺 =  $c(f_{k+1}) - c(f_{\ell(k+1)})$
- ▶ したがって, 左辺 = 右辺



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (4)

- 2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき
- ▶ つまり, ある頂点  $v \in V$  と添え字  $k' \leq k$  が存在して,  
 $X_{k+1} = X_{k'} \cup \{v\}$ , かつ,  $f_{k+1} = f_{\ell(k')}$
  - ▶ また, このとき,  $E(X_{k+1}) \cap F = (E(X_{k'}) \cap F) \cup \{f_{k+1}\}$



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^*$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_k} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^*
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 2) c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 2) c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}| - 1) c(f_{\ell(k+1)})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2  $f_{k+1}$  の一方の端点のみが  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点であるとき

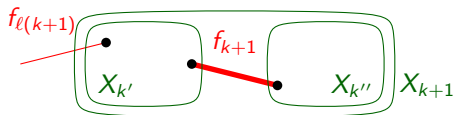
▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 2) c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}| - 1) c(f_{\ell(k+1)}) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 1) c(f_{\ell(k+1)})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (6)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

- ▶ つまり、ある2つの添え字  $k', k'' \leq k$  が存在して、  
 $X_{k+1} = X_{k'} \cup X_{k''}$ ,  $X_{k'} \cap X_{k''} = \emptyset$ , かつ,  $f_{k+1} = f_{\ell(k')} = f_{\ell(k'')}$
- ▶ また、このとき、  
 $E(X_{k+1}) \cap F = (E(X_{k'}) \cap F) \cup (E(X_{k''}) \cap F) \cup \{f_{k+1}\}$



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって，証明したいことの左辺

$$= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^*$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^*
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1) c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1) c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$



## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) y_S^* \\
 &= - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) y_S^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1) y_S^* - (|X_{k+1}| - 1) y_{X_{k+1}}^* \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1) c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1) (c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\ \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
 &\quad - (|X_{k'}| - 1)c(f_{k+1}) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{k+1}) \\
 &\quad - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
 &\quad - (|X_{k'}| - 1)c(f_{k+1}) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{k+1}) \\
 &\quad - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
 &\quad - (|X_{k'}| - 1)c(f_{k+1}) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{k+1}) \\
 &\quad - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
 &\quad - (|X_{k'}| - 1)c(f_{k+1}) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{k+1}) \\
 &\quad - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k+1)})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

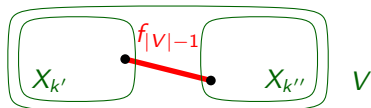
3  $f_{k+1}$  のどちらの端点も  $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$  の孤立点でないとき

▶ したがって、証明したいことの左辺

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 &\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
 &\quad - (|X_{k'}| - 1)c(f_{k+1}) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{k+1}) \\
 &\quad - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k+1)}) \\
 &= \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 1)c(f_{\ell(k+1)})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (1)

- ▶  $f_{|V|-1}$  が  $X_{k'}$  と  $X_{k''}$  を結ぶとする
- ▶ つまり,  $V = X_{k'} \cup X_{k''}$ ,  $X_{k'} \cap X_{k''} = \emptyset$ ,  
 $f_{\ell(k')} = f_{\ell(k'')} = f_{|V|-1}$ ,  $(E(X_{k'}) \cap F) \cup (E(X_{k'')} \cap F) \cup \{f_{|V|-1}\} = F$





## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

- ▶ このとき、(DLP) における許容解  $(y^*, z^*, w^*)$  の目的関数値は
- $$\begin{aligned}
 & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_s^* - (|V| - 1)z^* - \sum_{e \in E} w_e^* \\
 & = - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1)y_s^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1)y_s^* + (|V| - 1)c(f_{|V|-1})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

- ▶ このとき，(DLP) における許容解  $(y^*, z^*, w^*)$  の目的関数値は

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_s^* - (|V| - 1)z^* - \sum_{e \in E} w_e^* \\
 & = - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1)y_s^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1)y_s^* + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 & \quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) + (|V| - 1)c(f_{|V|-1})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

▶ このとき、(DLP) における許容解  $(y^*, z^*, w^*)$  の目的関数値は

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_s^* - (|V| - 1)z^* - \sum_{e \in E} w_e^* \\
 & = - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1)y_s^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1)y_s^* + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 & \quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{|V|-1})
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

▶ このとき、(DLP) における許容解  $(y^*, z^*, w^*)$  の目的関数値は

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_s^* - (|V| - 1)z^* - \sum_{e \in E} w_e^* \\
 & = - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1)y_s^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1)y_s^* + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 & \quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{|V|-1}) = \sum_{e \in F} c(e)
 \end{aligned}$$

## 完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

- ▶ このとき、(DLP) における許容解  $(y^*, z^*, w^*)$  の目的関数値は

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1)y_S^* - (|V| - 1)z^* - \sum_{e \in E} w_e^* \\
 & = - \sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1)y_S^* - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S| - 1)y_S^* + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1)c(f_{\ell(k')}) + \\
 & \quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}| - 1)c(f_{\ell(k'')}) + (|V| - 1)c(f_{|V|-1}) \\
 & = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{|V|-1}) = \sum_{e \in F} c(e)
 \end{aligned}$$

- ▶ これは (LP) における許容解  $x^*$  の目的関数値

## 結論

## 分かったこと

定式化 4 (の線形計画緩和) の不等式系は完全双対整数性を持つ

つまり、線形計画緩和の許容領域は凸多面体

## もう 1 つ分かること

Kruskal のアルゴリズムは正しく最小費用全域木を出力する

つまり、Kruskal のアルゴリズムの正しさを証明するために線形計画法と凸多面体を利用した

# 目次

- ① 最小費用全域木問題：第4の定式化
- ② Kruskal のアルゴリズム
- ③ 最小費用全域木問題と完全双対整数性：証明
- ④ 今日のまとめ

## 今日の目標

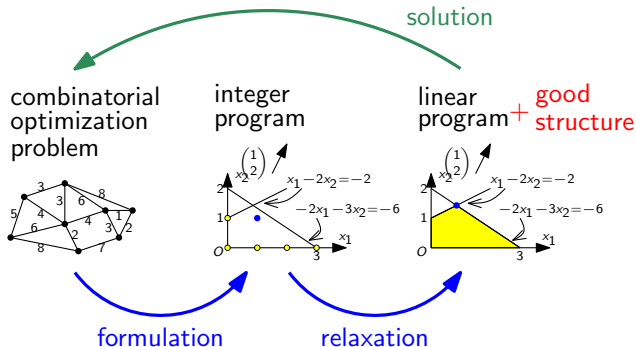
## 今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する

- ▶ 前回は準備
- ▶ 今回、証明



## この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① 最小費用全域木問題：第4の定式化
- ② Kruskal のアルゴリズム
- ③ 最小費用全域木問題と完全双対整数性：証明
- ④ 今日のまとめ