離散最適化基礎論 第 9 回
完全双対整数性：全域木 (1)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 12 月 12 日

最終更新：2014 年 12 月 13 日　08:37

今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する

- 今日は準備
- 次回に証明

目次

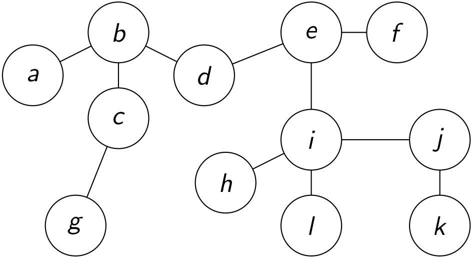
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



「連結である」ことの定義は次のスライドで

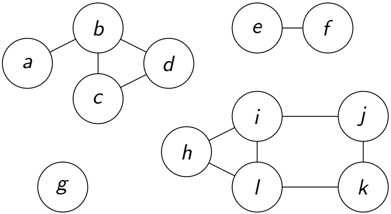
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

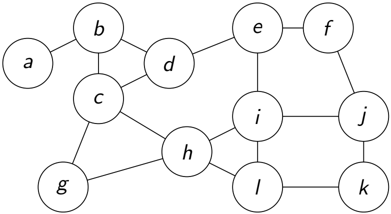
グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

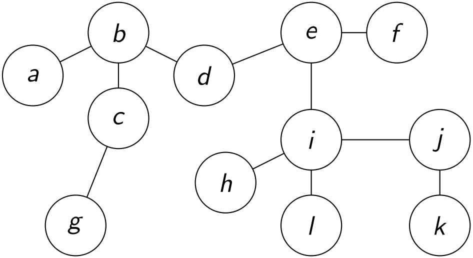
注：「グラフが連結する」とは言わない

木の辺数

木の辺数

任意の木 $G=(V,E)$ に対して

$$|E|=|V|-1$$



$|V|=12,\ |E|=11$

証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

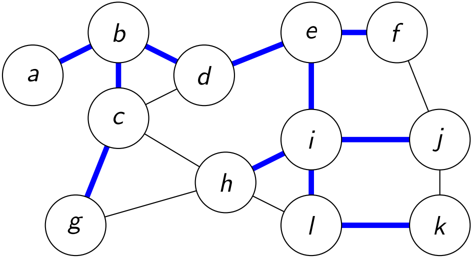
グラフの全域木

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木とは？

G の全域木とは，G の部分グラフで次を満たすもの
- 木である
- 頂点集合が V である

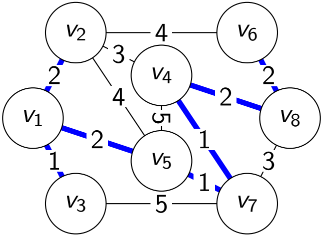
- 全張木，生成木とも呼ぶことがある



最小費用全域木問題

最小費用全域木問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の全域木で，費用が最小のもの



事実

最小費用全域木問題は効率よく解くことができる (Kruskal '56, Prim '57)

効率よく ＝ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

最小費用全域木問題：定式化 1

記法：$\delta(S) = S$ に一方の端点，$V - S$ にもう一方の端点を持つ辺全体の集合

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 1

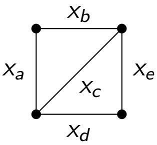
$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

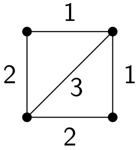
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e) x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 & (\forall\ C : G \text{ の閉路}), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

これは正しい定式化

最小費用全域木問題：定式化 1 の例

Variables





Costs

$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\
\text{subject to} & x_a + x_b + x_c \le 2, x_c + x_d + x_e \le 2, x_a + x_b + x_e + x_d \le 3, \\
& x_a + x_b \ge 1, x_b + x_c + x_e \ge 1, x_d + x_e \ge 1, x_a + x_c + x_d \ge 1, \\
& x_b + x_c + x_d \ge 1, x_a + x_c + x_e \ge 1, x_a + x_b + x_d + x_e \ge 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

全域木の性質

木であるための必要十分条件

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 3 つは同値

1. G は閉路を含まない，かつ，G は連結である (つまり，G は木である)
2. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である
3. G は連結である，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

- 定式化 1 は 1 に基づいている
- 定式化 2 は 2 に基づいて行う
- 定式化 3 は 3 に基づいて行う

証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

最小費用全域木問題：定式化 2

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 2

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \qquad (\forall\ C : G \text{ の閉路}), \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\ e \in E)
\end{aligned}
$$

これも正しい定式化

最小費用全域木問題：定式化 3

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 3

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\, S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V), \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

これも正しい定式化

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる

$\leadsto$ 「よい定式化」と「悪い定式化」がある

最小費用全域木問題：定式化のまとめ

定式化 1

- 閉路に対する制約 と カットに対する制約

定式化 2

- 閉路に対する制約 と 辺数に対する等式制約

定式化 3

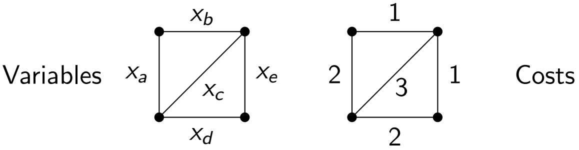
- カットに対する制約 と 辺数に対する等式制約

疑問

どの定式化が完全双対整数性を持つのだろうか？

目次

最小費用全域木問題：定式化 1 の例

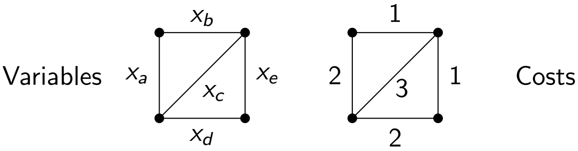


$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b + x_c \leq 2, x_c + x_d + x_e \leq 2, x_a + x_b + x_e + x_d \leq 3, \\
& x_a + x_b \geq 1, x_b + x_c + x_e \geq 1, x_d + x_e \geq 1, x_a + x_c + x_d \geq 1, \\
& x_b + x_c + x_d \geq 1, x_a + x_c + x_e \geq 1, x_a + x_b + x_d + x_e \geq 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = (1, 1, 0, 0, 1)$ は最適解で，最適値は 4

最小費用全域木問題：定式化 1 の例 — 線形計画緩和



$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\
\text{subject to} & x_a + x_b + x_c \le 2, x_c + x_d + x_e \le 2, x_a + x_b + x_e + x_d \le 3, \\
& x_a + x_b \ge 1, x_b + x_c + x_e \ge 1, x_d + x_e \ge 1, x_a + x_c + x_d \ge 1, \\
& x_b + x_c + x_d \ge 1, x_a + x_c + x_e \ge 1, x_a + x_b + x_d + x_e \ge 1, \\
& 0 \le x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \le 1
\end{array}
$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = (1/2, 1/2, 0, 1/2, 1/2)$ は許容解で，目的関数値は 3

最小費用全域木問題：定式化のまとめ

定式化 1

- 閉路に対する制約 と カットに対する制約 →持たない

定式化 2

- 閉路に対する制約 と 辺数に対する等式制約

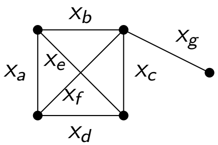
定式化 3

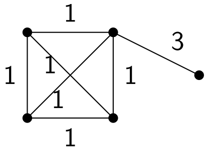
- カットに対する制約 と 辺数に対する等式制約

疑問

どの定式化が完全双対整数性を持つのだろうか？

最小費用全域木問題：定式化 2 の例

Variables 

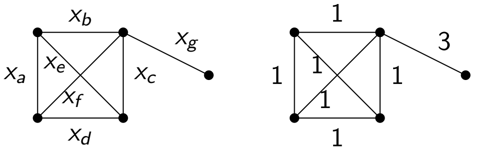


Costs

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + 3x_g \\
\text{subject to} & x_a + x_b + x_f \leq 2, x_b + x_c + x_e \leq 2, x_c + x_d + x_f \leq 2, \\
& x_a + x_d + x_e \leq 2, x_a + x_b + x_c + x_d \leq 3, \\
& x_a + x_c + x_e + x_f \leq 3, x_b + x_d + x_e + x_f \leq 3, \\
& x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g = 4, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ は最適解で，最適値は 6

最小費用全域木問題：定式化 2 の例 — 線形計画緩和

Variables 

Costs

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + 3x_g \\ \text{subject to} & x_a + x_b + x_f \le 2, x_b + x_c + x_e \le 2, x_c + x_d + x_f \le 2, \\ & x_a + x_d + x_e \le 2, x_a + x_b + x_c + x_d \le 3, \\ & x_a + x_c + x_e + x_f \le 3, x_b + x_d + x_e + x_f \le 3, \\ & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g = 4, \\ & 0 \le x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g \le 1 \end{array}$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g) = (1, 1/2, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 0)$ は最適解で，
最適値は 4

最小費用全域木問題：定式化のまとめ

定式化 1

- 閉路に対する制約 と カットに対する制約 →持たない

定式化 2

- 閉路に対する制約 と 辺数に対する等式制約 →持たない

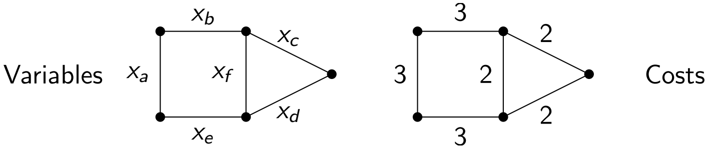
定式化 3

- カットに対する制約 と 辺数に対する等式制約

疑問

どの定式化が完全双対整数性を持つのだろうか？

最小費用全域木問題：定式化 3 の例

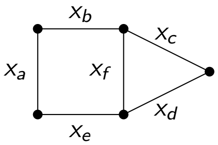


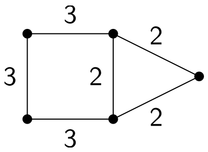
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 3x_a + 3x_b + 2x_c + 2x_d + 3x_e + 2x_f \\
\text{subject to} & x_a + x_b \geq 1, x_b + x_c + x_f \geq 1, x_c + x_d \geq 1, \\
& x_d + x_e + x_f \geq 1, x_a + x_e \geq 1, x_a + x_c + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_d \geq 1, x_a + x_b + x_d + x_e + x_f \geq 1, \\
& x_b + x_e \geq 1, x_b + x_d + x_f \geq 1, x_b + x_c + x_d + x_e \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_e + x_f \geq 1, x_c + x_e + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_c + x_f \geq 1, x_a + x_d + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f = 4, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f) = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ は最適解で，最適値は 10

最小費用全域木問題：定式化 3 の例 — 線形計画緩和

Variables





Costs

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 3x_a + 3x_b + 2x_c + 2x_d + 3x_e + 2x_f \\
\text{subject to} & x_a + x_b \geq 1, x_b + x_c + x_f \geq 1, x_c + x_d \geq 1, \\
& x_d + x_e + x_f \geq 1, x_a + x_e \geq 1, x_a + x_c + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_d \geq 1, x_a + x_b + x_d + x_e + x_f \geq 1, \\
& x_b + x_e \geq 1, x_b + x_d + x_f \geq 1, x_b + x_c + x_d + x_e \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_e + x_f \geq 1, x_c + x_e + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_c + x_f \geq 1, x_a + x_d + x_f \geq 1, \\
& x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f = 4, \\
& 0 \leq x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \leq 1
\end{array}
$$

$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f) = (1/2, 1/2, 1, 1, 1/2, 1/2)$ は許容解で，最適値は 9.5

最小費用全域木問題：定式化のまとめ

定式化 1

- 閉路に対する制約 と カットに対する制約 →持たない

定式化 2

- 閉路に対する制約 と 辺数に対する等式制約 →持たない

定式化 3

- カットに対する制約 と 辺数に対する等式制約 →持たない

疑問

どの定式化が完全双対整数性を持つのだろうか？

解答：どれも持たない

最小費用全域木問題：次回予告

次回予告

完全双対整数性を持つ最小費用全域木問題の定式化

- それは，ここで考えた 3 つの定式化とは違う
- 証明には Kruskal のアルゴリズムを用いる

目次

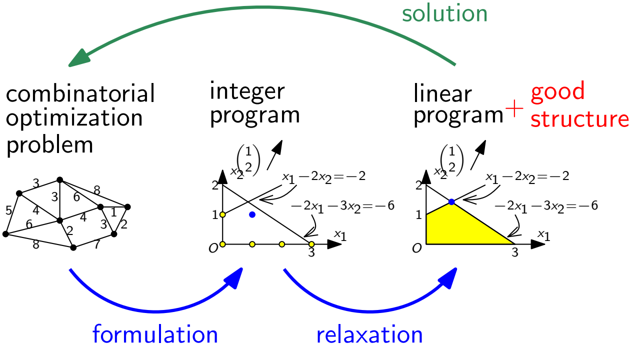
今日の目標

今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する

- 今日は準備
- 次回に証明

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次