離散最適化基礎論 第 7 回
完全双対整数性

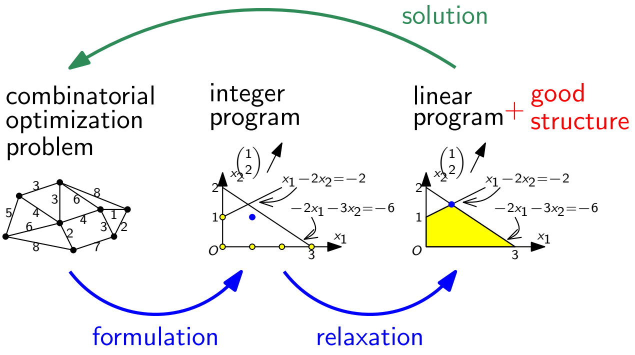
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 28 日

最終更新：2014 年 12 月 9 日　08:36

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

観察 (再掲)

$$\text{(P) の最適値} \leq \text{(LP) の最適値} = \text{(DLP) の最適値} \leq \text{(D) の最適値}$$

特に,

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

$$\text{(P) の最適値} = \text{(LP) の最適値} = \text{(DLP) の最適値} = \text{(D) の最適値}$$

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

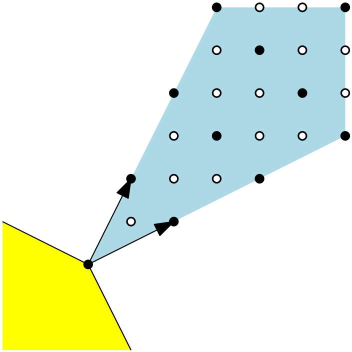
(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\longleftarrow$ 整凸多面体
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\longleftarrow$ 法錐の Hilbert 生成系

双対問題 (DLP) の整数性は以下のように解釈 (あるいは定義) できる

- (LP) の許容領域 $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ の任意の面 F を考える
- 任意の $x \in F$ に対して，$Ax \leq b$ を構成する不等式 $a_i^\top x \leq b_i$ で $a_i^\top x = b_i$ を満たすものをすべて考える
- 双対問題の整数性：これらの a_i が F の法錐の Hilbert 生成系である



$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

(LP) の整数性：すべての座標が整数となる最適解 (整数最適解) が存在

主問題の整数性 (続き)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(LP) の許容領域が整凸多面体 $\Rightarrow$
任意の $c \in \mathbb{R}^n$ に対して，(LP) は整数最適解を持つ

今日の目標

完全双対整数性を理解する

- 重要概念：完全ユニモジュラ行列

目次

完全双対整数性

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

完全双対整数性とは？

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性 (total dual integrality) を持つ，
(あるいは，TDI (totally dual integral) である) とは，
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題が整数最適解を持つ

$$\text{(DLP)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

完全双対整数性と Hilbert 生成系

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と Hilbert 生成系の関係)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Leftrightarrow$
P の任意の非空な面 $F \subseteq P$ に対して，
ベクトルの集合 $\{a_i \in \mathbb{Z}^n \mid a_i x = b_i \ \forall\, x \in F\}$ は法錐 N_F の Hilbert 生成系

これは前回の議論から分かる (ので，証明は省略)

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow$ P は整凸多面体

証明には次の補題を使う

補題 1

P は整凸多面体 $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\
& \text{subject to} & Ax \leq b
\end{array}
$$

補題 1 の証明 (1)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 1

P は整凸多面体 $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{array}{lll} \text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\ & \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

$\Rightarrow$ の証明：P が整凸多面体であると仮定

- 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，(LP) の最適解集合は P の面 (F とする)
- F は頂点を含む (その頂点を v とする)
- P は整凸多面体なので，v の各成分は整数
- $\therefore$ 最適値 $c^\top v$ も整数 $\square$

補題 1 の証明 (2)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 1

P は整凸多面体 $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{array}{lll} \text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\ & \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

$\Leftarrow$ の証明：任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して (LP) の最適値が整数であると仮定

- 頂点 $v \in P$ を 1 つ選ぶ
- v を (LP) の唯一の最適解とするような目的関数方向 $c \in \mathbb{Z}^n$ を考える (演習問題：そのような整数ベクトル c が必ず存在する)
- 仮定より，$c^\top v$ は整数
- 他の頂点 $u \in P$ を考えると，$c^\top v > c^\top u$ ($\because$ u は c を目的関数方向とする (LP) の最適解ではない)

補題 1 の証明 (3)

- 場合分け：$v_1 \geq u_1$ のとき，十分大きな整数 t に対して，

$$tc^\top v + v_1 > tc^\top u + u_1$$

- 場合分け：$v_1 < u_1$ のとき，十分大きな整数 t に対して，

$$tc^\top v + v_1 > tc^\top u + u_1$$

- すなわち，十分大きな正整数 t に対して，$\tilde{c} \in \mathbb{Z}^n$ を

$$\tilde{c}_1 = tc_1 + 1, \tilde{c}_2 = tc_2, \ldots, \tilde{c}_n = tc_n$$

  と定義すると，
  v は $\tilde{c}$ を目的関数方向とする (LP) に対しても唯一の最適解

補題 1 の証明 (4)

- このとき，$\tilde{c}^\top v = tc^\top v + v_1$ であり，仮定より，$\tilde{c}^\top v$ も整数
- したがって，v_1 は整数
- 同様な考察から，$v_2, \ldots, v_n$ は全部整数
- したがって，v のすべての成分は整数であり，P は整凸多面体 $\square$

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow$ P は整凸多面体

証明には次の補題を使う

補題 1

P は整凸多面体 $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{array}{lll} \text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\ & \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

補題の証明が終わった

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow$ P は整凸多面体

証明：$Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つと仮定する

- 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ を考える
- 不等式系の完全双対整数性より，(DLP) は整数最適解を持つ
- すなわち，(DLP) の最適値は整数
- 強双対定理より，(LP) の最適値も整数
- 補題 1 より，P は整凸多面体 □

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

注意：用語の使い方

- P が整凸多面体である — 凸多面体の性質
- $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ — 不等式系の性質

「凸多面体」とそれを定義する「不等式系」の違いに注意

- つまり，冗長な不等式が意味を持っている

目次

疑問

疑問

どのような不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持っているのか？

1 つの答え：

A が完全ユニモジュラ行列であるとき

完全ユニモジュラ行列

完全ユニモジュラ行列とは？

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が**完全ユニモジュラ** (totally unimodular) であるとは，
A の任意の正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであること

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- 1 次の正方部分行列の行列式：1 か 0
- 2 次の正方部分行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

よって，A は完全ユニモジュラ

完全ユニモジュラ行列

完全ユニモジュラ行列とは？

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ (totally unimodular) であるとは，
A の任意の正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであること

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- 1 次の正方部分行列の行列式：1 か 0 か -1
- 2 次の正方部分行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

よって，A は完全ユニモジュラではない

完全ユニモジュラ行列と完全双対整数性

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全ユニモジュラ行列と完全双対整数性)

A が完全ユニモジュラ	$\Rightarrow$	任意のベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ に対して 不等式系 $Ax \leq b$ は完全双対整数性を持つ (つまり，任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して (DLP) が整数最適解を持つ)

証明：次のステップを踏む

完全ユニモジュラ行列と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 2 (完全ユニモジュラ行列と整凸多面体)

A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$ P の任意の頂点は整数座標しか持たない

これは前回の結果と完全ユニモジュラ行列の定義から分かる

前回の結果 (再掲)

A の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1$ $\Rightarrow$
P の任意の頂点は整数座標しか持たない (つまり，P は整凸多面体)

A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$
A の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1$

完全ユニモジュラ性を保つ操作

補題 3

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$

(1) $A^\top \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ も完全ユニモジュラ

(2) $-A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ も完全ユニモジュラ

(3) $[A\ I] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ も完全ユニモジュラ

(4) $[A\ -A] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+n)}$ も完全ユニモジュラ

(3) だけ証明する

- (1), (2), (4) は演習問題

完全ユニモジュラ性を保つ操作：証明

証明すること

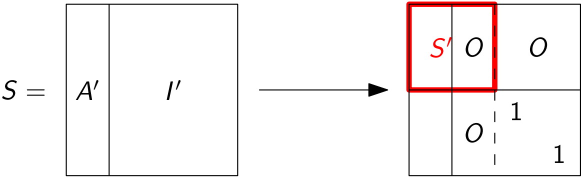
$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$ $[A\ I] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ も完全ユニモジュラ

$[A\ I]$ の k 次正方部分行列 S を考える $(1 \leq k \leq m)$

- つまり，A のある部分行列 $A' \in \mathbb{Z}^{k \times k'}$ と I のある部分行列 $I' \in \mathbb{Z}^{k \times (k-k')}$ を使って，$S = [A'\ I']$ になっている
- 考えたい量は S の行列式
- 行や列を入れ替えても行列式の絶対値は変わらないので，入れ替えて S を次のように変形

$$S = [A'\ I'] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} S' & O \\ O & I'' \end{bmatrix}$$ ただし，I'' は (小さな) 単位行列

完全ユニモジュラ性を保つ操作：証明 (続き)



- 変形後の行列の行列式は S' の行列式に等しい
- S' はある列を 0 ベクトルとするか，
  A' の正方部分行列 (の行を入れ替えたもの)
  - 前者の場合，S' の行列式は 0
  - 後者の場合，S' の行列式は $0, 1, -1$ のいずれか
    ($\because$ A が完全ユニモジュラ)
- したがって，S の行列式も $0, 1, -1$ のいずれか $\square$

完全ユニモジュラ行列と双対問題の整数性

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 4 (完全ユニモジュラ行列と双対問題の整数性)

A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$
任意の $b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題が整数最適解を持つ

$$\text{(DLP)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

証明：

- $A^\top y = c \Leftrightarrow A^\top y \leq c$ かつ $-A^\top y \leq -c$
- したがって，(DLP) は次の問題 (DLP’) と同じ

$$\text{(DLP')} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, -A^\top y \leq -c, y \geq 0 \end{array}$$

- (DLP’) の許容領域を Q とする

完全ユニモジュラ行列と双対問題の整数性

証明 (続き)：

- つまり，$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{bmatrix} A^\top \\ -A^\top \\ -I \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- $A' = \begin{bmatrix} A^\top \\ -A^\top \\ -I \end{bmatrix}$, $c' = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$ と置き直すと，$Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A'y \leq c'\}$
- 補題 3 より，A' は完全ユニモジュラ
- c' は整数ベクトルなので，
補題 2 より，Q の任意の頂点は整数座標しか持たない
- つまり，(DLP) は必ず整数最適解を持つ □

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

注意：用語の使い方

- P が整凸多面体である — 凸多面体の性質
- $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ — 不等式系の性質
- A が完全ユニモジュラである — 行列の性質

「凸多面体」,「不等式系」とそれを定義する「行列」の違いに注意

目次

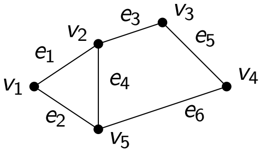
無向グラフの接続行列

無向グラフ $G = (V, E)$

接続行列とは？

G の接続行列とは，行列 $B \in \{0,1\}^{V \times E}$ で
任意の $v \in V, e \in E$ に対して $B_{v,e}$ を次のように定義したもの

$$B_{v,e} = \begin{cases} 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}), \\ 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \end{cases}$$



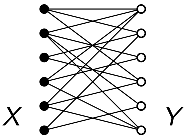
$$\begin{array}{c|cccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & & & & \\ v_2 & 1 & & 1 & 1 & & \\ v_3 & & & 1 & & 1 & \\ v_4 & & & & & 1 & 1 \\ v_5 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

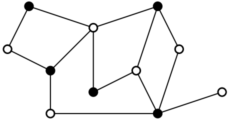
二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ

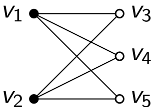
G が二部グラフ $\Rightarrow$ G の接続行列 B は完全ユニモジュラ

補足：$G = (V, E)$ が二部グラフであるとは，V を X と Y に分割して
どの辺も X の頂点同士，Y の頂点同士を結ばないようにできるもの





二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：例



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例えば，第 1, 4 行と第 2, 3 列から作られる B の部分行列 B' の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (1)

B の k 次正方部分行列 B' を考える

証明の方針

k に関する帰納法

基底段階：$k = 1$ のとき

B' は B の 1 つの成分で構成される

- B の各成分は 0 か 1 なので，B' の行列式も 0 か 1 $\square$

帰納段階：$k \geq 1$ のとき

B の任意の k 次正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであると仮定

- 証明すること：B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかになること

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (2)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

1. B' が 0 ベクトルを列として持つ
2. そうでないとき，B' が 1 が 1 つだけある列を持つ
3. そうでないとき，B' のどの列にも 1 が 2 つある

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (3)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

1. B' が 0 ベクトルを列として持つ

このとき，$\det(B') = 0$

例：第 2,3,4 行と第 3,4,5 列が作る部分行列 B' に対して

$$\det(B') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (4)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

2. そうでないとき，B' が 1 が 1 つだけある列を持つ

- その列の他の成分はすべて 0 (先ほどの場合ではないから)
- その列に関して余因子展開を行うと，
  B の k 次正方部分行列が出てきて，帰納法の仮定から，
  $\det(B')$ が $1, 0, -1$ のいずれかであると分かる

例：第 1,2,4 行と第 3,4,5 列が作る部分行列 B' に対して

$$\det(B') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (5)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

3. そうでないとき，B' のどの列にも 1 が 2 つある

- B' の各行は G の頂点に対応，各列は G の辺に対応
- つまり，X の頂点に対応する行と Y の頂点に対応する行がある
- ここで，ベクトル $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ を次で定める

$$v \text{ が } X \text{ の頂点のとき，} \quad y_v = 1, \quad v \text{ が } Y \text{ の頂点のとき，} \quad y_v = -1$$

例：第 1,2,3,4 行と第 1,2,4,5 列が作る部分行列を B' として

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき，$y^\top = (1, 1, -1, -1)$

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (6)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

3. そうでないとき，B' のどの列にも 1 が 2 つある

- このとき，$y^\top B' = 0$
- したがって，B' の列ベクトルは線形従属であり，$\det(B') = 0$

$$y^\top B' = (1, 1, -1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0, 0)$$

まとめ

すべての場合で $\det(B')$ は $0, 1, -1$ のいずれか $\square$

目次

今日の目標

今日の目標

完全双対整数性を理解する

- 重要概念：完全ユニモジュラ行列

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

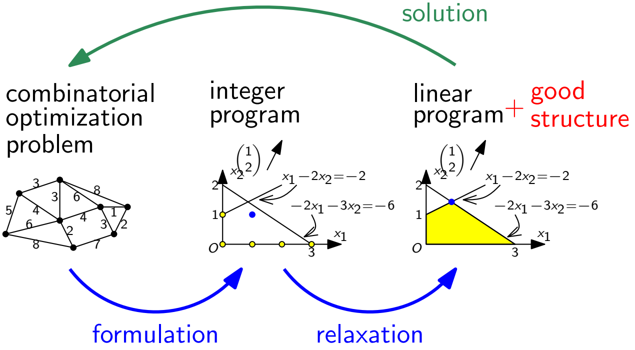
つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\longleftarrow$ 整凸多面体
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\longleftarrow$ 法錐の Hilbert 生成系

特に重要な場合

(LP) の許容領域を記述する不等式系が完全双対整数性を持つとき

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次