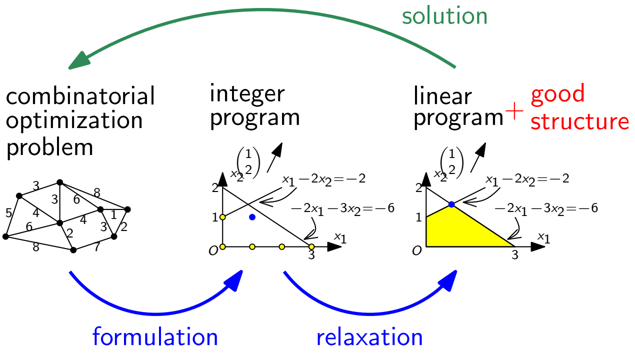
離散最適化基礎論 第 6 回
双対問題の整数性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 14 日

最終更新：2014 年 12 月 9 日　08:35



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

解きやすい問題
多項式時間解法が存在する

解きにくい問題
NP 困難性が証明されている

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

事実 (再掲) (証明は省略)

conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域
⇒ (P) の最適値 = (LP) の最適値

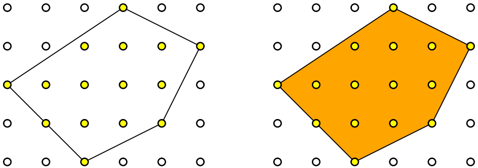
conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域の整凸包なので

$\boxed{\text{conv((P) の許容領域)} = \text{(LP) の許容領域である}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{(LP) の許容領域が整凸多面体である}}$

$\rightsquigarrow$ (LP) の許容領域が整凸多面体となるときが重要に思える



双対問題についても同様だが…

問題点

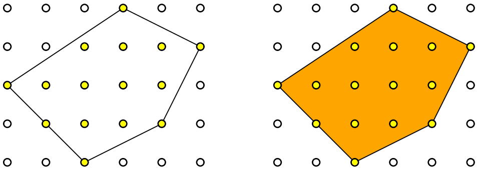
(LP) の許容領域が有界であっても，
(DLP) の許容領域は有界でないかもしれない

そのため，今までの議論がそのまま使えない…

今日の目標

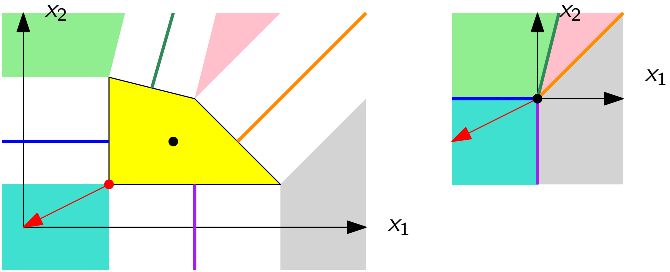
双対問題を幾何学的に理解する方法を使えるようになる

次回以降：「双対問題の整数性」を理解する



直感

双対問題は目的関数の方向ベクトル c が所属する法錐 N_F を見つける問題



これは本当か？

線形計画問題の相補性定理

この直感の正当化

スケジュール 前半 (予定)

1. 線形計画問題と整数計画問題 (10/3)
2. 組合せ最適化問題と整数計画問題 (10/10)

⋆ 休講 (国内出張) (10/17)

3. 凸多面体の基礎 (10/24)
4. 凸多面体の整数性 (10/31)
5. 双対性の幾何学 (11/7)
6. 双対問題の整数性 (11/14)

⋆ 休講 (調布祭) (11/21)

7. 完全双対整数性 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 完全双対整数性：ネットワークフロー (12/5)
9. 完全双対整数性：全域木 (12/12)
10. 完全双対整数性：マッチング (12/19)
- ⋆ 冬季休業 (12/26, 1/2)

11. 整数性ギャップ：下界 (1/9)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/16)

12. 整数性ギャップ：上界 (1/23)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/30)

13. まとめ (または，最近のトピック) (2/6)
- ⋆ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

双対問題の整数性を理解する

- 重要概念：Hilbert 生成系，Hilbert 基底

目次

主問題の整数性

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

(LP) の整数性：すべての座標が整数となる最適解 (整数最適解) が存在

主問題の整数性 (続き)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(LP) の許容領域が整凸多面体 $\Rightarrow$
任意の $c \in \mathbb{R}^n$ に対して，(LP) は整数最適解を持つ

整凸多面体となるための十分条件

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題

A の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1 \Rightarrow$
P の任意の頂点は整数座標しか持たない (つまり，P は整凸多面体)

証明；P の頂点は「$Ax \leq b$」の n 個の行で満たす

- その n 個の行からなる方程式を

$$A'x = b'$$

とする $(A' \in \mathbb{Z}^{n \times n}, b' \in \mathbb{Z}^n)$

- 補足：A' は A の n 次正方部分行列で，逆行列を持つ
- つまり，$x = A'^{-1}b'$

Cramer の公式

「$A'x = b'$ を解く公式」がある

Cramer の公式

任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$x_i = \frac{\det(A'_i)}{\det(A')}$$

ここで，A'_i とは，A' の第 i 列を b' で置き換えたもの

いつ x_i が整数になるのか？

- 分子は整数である ($\because$ A'_i のすべての成分は整数)
- $\therefore$ 分母が 1 か -1 であればよい
- 「A の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1$」という仮定から これが正しいことも分かる □

双対問題の整数性

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

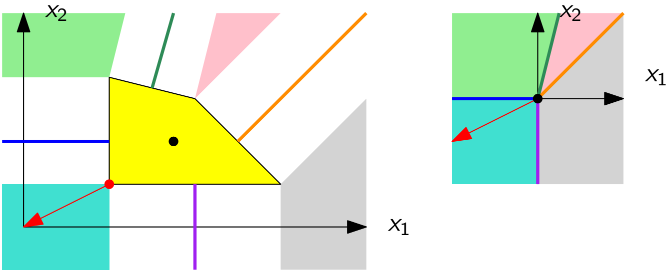
仮定：(LP) の許容領域は整凸多面体

目標：次の「○○○」が知りたい

○○○ $\Rightarrow$ 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，(DLP) は整数最適解を持つ

双対問題の整数性：幾何学的解釈

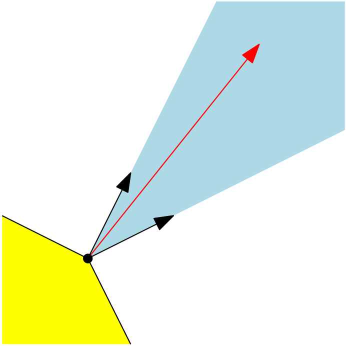
- $c \in \mathbb{Z}^n$ はある頂点の法錐に含まれる
- $c =$ その頂点を作る超平面の法線ベクトルの非負結合
- その結合における係数が整数になる $\Leftrightarrow$ (DLP) は整数最適解を持つ



注意：法線ベクトルは整数ベクトル ($A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ だから)

1 つの法錐に着目したとき··· (1)

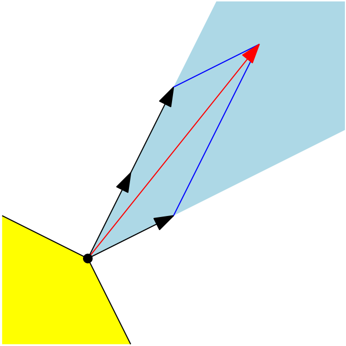
法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，目的関数方向 $c = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

1 つの法錐に着目したとき··· (1)

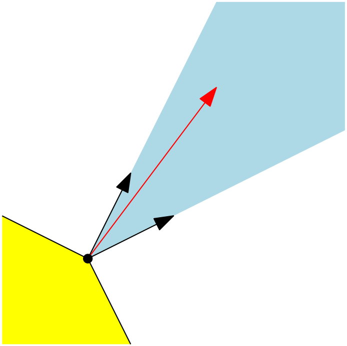
法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，目的関数方向 $c = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

1 つの法錐に着目したとき… (2)

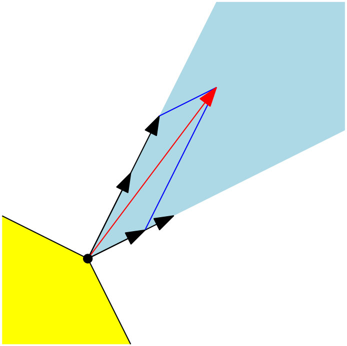
法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，目的関数方向 $c = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

1 つの法錐に着目したとき⋯ (2)

法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，目的関数方向 $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

目次

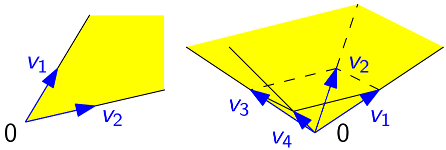
凸多面錐

凸多面錐とは？

凸多面錐 (convex polyhedral cone) とは，
有限個のベクトル $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ を用いて次のように書ける集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

$v_1, \ldots, v_k$ が生成する凸多面錐とも言う



参考：凸錐の V 表現

凸多面錐の整数性？

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

次の条件を満たすような凸多面錐は整数性を持っていると言える (かな？)

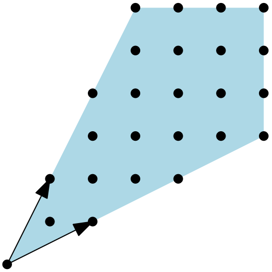
- $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n$
- 任意の $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ に対して，非負整数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

C に属する任意の整数ベクトルが $v_1, \ldots, v_k$ の非負整数結合として書ける

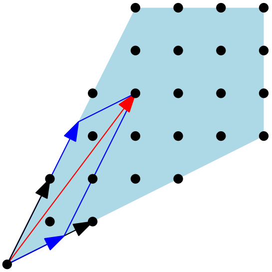
凸多面錐の整数性：例 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



凸多面錐の整数性：例 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

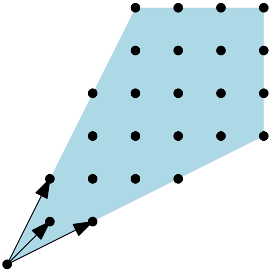


$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がない

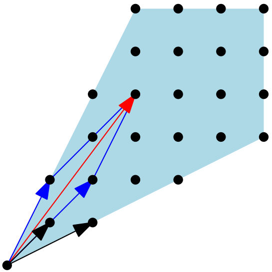
凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

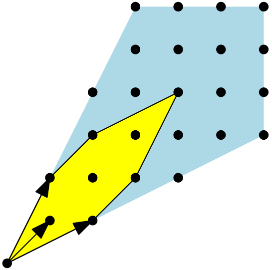


$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がある

凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



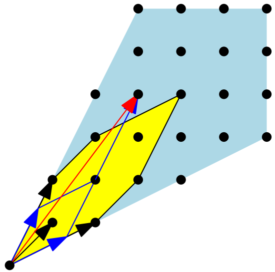
$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がある

- $P = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ とすると，$P \cap \mathbb{Z}^2$ の点はすべて v_1, v_2, v_3 の非負整数結合として書ける

凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



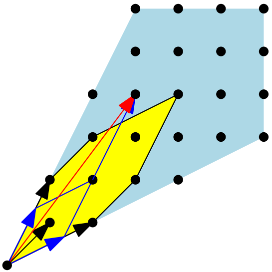
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がある

- $P = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ とすると，$P \cap \mathbb{Z}^2$ の点はすべて v_1, v_2, v_3 の非負整数結合として書ける

凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



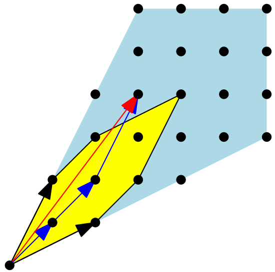
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がある

- $P = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ とすると，$P \cap \mathbb{Z}^2$ の点はすべて v_1, v_2, v_3 の非負整数結合として書ける

凸多面錐の整数性：例 2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



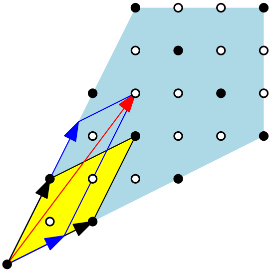
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 つ前のスライドの意味で) 整数性がある

- $P = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid 0 \le \lambda_i \le 1\}$ とすると，$P \cap \mathbb{Z}^2$ の点はすべて v_1, v_2, v_3 の非負整数結合として書ける

凸多面錐の整数性：例 1 (再考)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3 つ前のスライドの意味で) 整数性がない

Hilbert 生成系

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Hilbert 生成系とは？

C の Hilbert 生成系 (Hilbert generating set) とは
ベクトルの集合 $\{w_1, \ldots, w_\ell\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ で，

$$C \cap \mathbb{Z}^n = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i w_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } i \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ に対して，} \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\}$$

C に属する任意の整数ベクトルが $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合として書ける

Hilbert 基底

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Hilbert 生成系とは？

C の Hilbert 基底 (Hilbert basis) とは
C の Hilbert 生成系で，包含関係に関して極小なもの

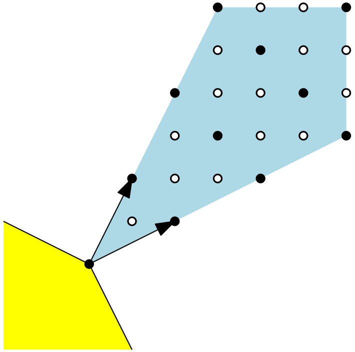
- すなわち，C の Hilbert 生成系 $\{w_1, \ldots, w_\ell\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ が
  C の Hilbert 基底であるとは，
  任意の $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対して，
  $\{w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_\ell\}$ が C の Hilbert 生成系ではないこと

ある意味で「非冗長」な Hilbert 生成系のこと

双対問題の整数性と Hilbert 生成系

双対問題 (DLP) の整数性は以下のように解釈 (あるいは定義) できる

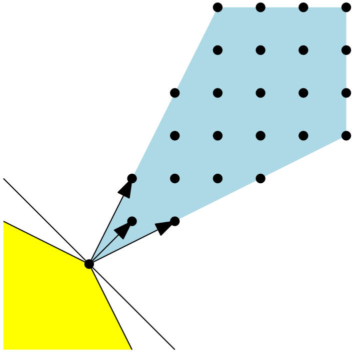
- (LP) の許容領域 $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ の任意の面 F を考える
- 任意の $x \in F$ に対して，$Ax \leq b$ を構成する不等式 $a_i^\top x \leq b_i$ で $a_i^\top x = b_i$ を満たすものをすべて考える
- 双対問題の整数性：これらの a_i が F の法錐の Hilbert 生成系である



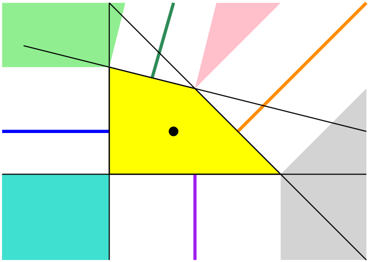
双対問題の整数性と Hilbert 生成系

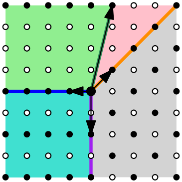
双対問題 (DLP) の整数性は以下のように解釈 (あるいは定義) できる

- (LP) の許容領域 $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ の任意の面 F を考える
- 任意の $x \in F$ に対して，$Ax \leq b$ を構成する不等式 $a_i^\top x \leq b_i$ で $a_i^\top x = b_i$ を満たすものをすべて考える
- 双対問題の整数性：これらの a_i が F の法錐の Hilbert 生成系である



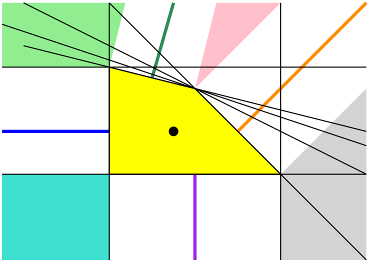
双対問題の整数性と Hilbert 生成系：例

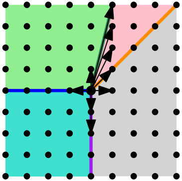




双対問題が整数性を持っていない

双対問題の整数性と Hilbert 生成系：例





双対問題が整数性を持っている

目次

Hilbert 生成系の存在性

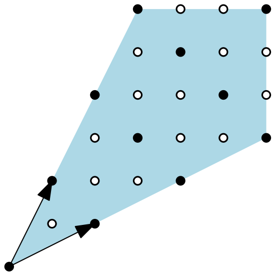
$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Gordan の補題

C の Hilbert 生成系は存在する

証明：$P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$ とする

- $W = P \cap \mathbb{Z}^n$ とする
- 証明すること：
  W は C の Hilbert 生成系である
- $W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}$ とする
  (注：P は凸多面体なので,
  W は有限集合)



Hilbert 生成系の存在性

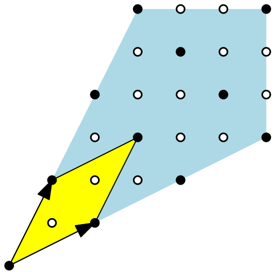
$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Gordan の補題

C の Hilbert 生成系は存在する

証明：$P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$ とする

- $W = P \cap \mathbb{Z}^n$ とする
- 証明すること：
  W は C の Hilbert 生成系である
- $W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}$ とする
  (注：P は凸多面体なので,
  W は有限集合)



Hilbert 生成系の存在性

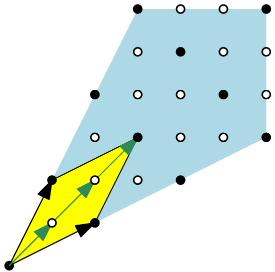
$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Gordan の補題

C の Hilbert 生成系は存在する

証明：$P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$ とする

- $W = P \cap \mathbb{Z}^n$ とする
- 証明すること：
  W は C の Hilbert 生成系である
- $W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}$ とする
  (注：P は凸多面体なので,
  W は有限集合)

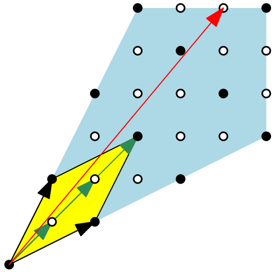


Hilbert 生成系の存在性：証明の続き (1)

つまり，次を証明したい

任意の $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ が $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合として書ける

- $x \in C$ なので，ある非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して，$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$
- ここで，各 λ_i は次のように一意に表現できる
$$\lambda_i = \alpha_i + \beta_i$$
ただし，α_i は非負整数，$0 \leq \beta_i < 1$
- すなわち，
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

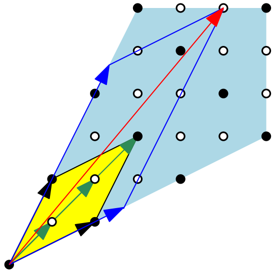


Hilbert 生成系の存在性：証明の続き (1)

つまり，次を証明したい

任意の $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ が $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合として書ける

- $x \in C$ なので，ある非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して，$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$
- ここで，各 λ_i は次のように一意に表現できる
$$\lambda_i = \alpha_i + \beta_i$$
ただし，α_i は非負整数，$0 \leq \beta_i < 1$
- すなわち，
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

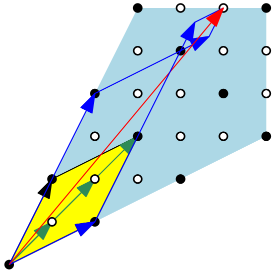


Hilbert 生成系の存在性：証明の続き (1)

つまり，次を証明したい

任意の $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ が $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合として書ける

- $x \in C$ なので，ある非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して，$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$
- ここで，各 λ_i は次のように一意に表現できる
$$\lambda_i = \alpha_i + \beta_i$$
ただし，α_i は非負整数，$0 \leq \beta_i < 1$
- すなわち，
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

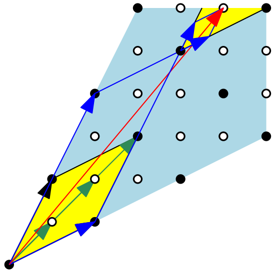


Hilbert 生成系の存在性：証明の続き (1)

つまり，次を証明したい

任意の $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ が $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合として書ける

- $x \in C$ なので，ある非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して，$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$
- ここで，各 λ_i は次のように一意に表現できる
$$\lambda_i = \alpha_i + \beta_i$$
ただし，α_i は非負整数，$0 \leq \beta_i < 1$
- すなわち，
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$



Hilbert 生成系の存在性：証明の続き (2)

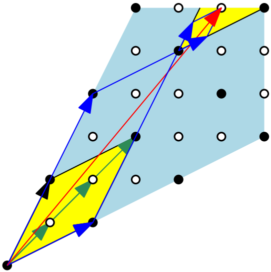
- 今の状況：

$$x = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\alpha_i}_{\text{非負整数}} \underbrace{v_i}_{\in W} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\beta_i}_{\text{0 以上 1 以下}} v_i}_{\in \mathbb{Z}^n}$$

- したがって，$\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i \in P \cap \mathbb{Z}^n$
- すなわち，ある $w_j \in W$ が存在して，

$$w_j = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

- つまり，
  x は $w_1, \ldots, w_\ell$ の非負整数結合 □



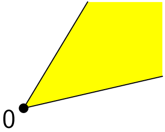
Pointed な凸多面錐

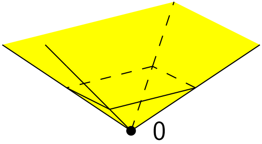
$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

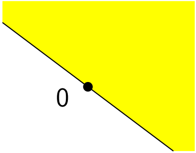
pointed な凸多面錐とは？

C が pointed であるとは，次が成り立つこと

$$x \in C \quad \Rightarrow \quad -x \notin C$$







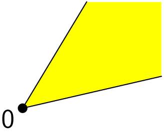
Pointed な凸多面錐

$$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

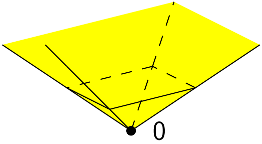
pointed な凸多面錐とは？

C が pointed であるとは，次が成り立つこと

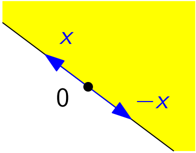
$$x \in C \quad \Rightarrow \quad -x \notin C$$



pointed



pointed



not pointed

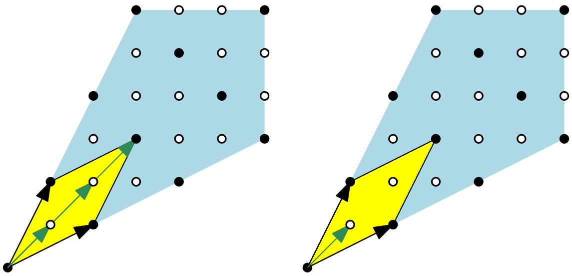
Hilbert 基底の一意性

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n, \quad C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

定理：Hilbert 基底の一意性

C が pointed $\Rightarrow$ C の Hilbert 基底は一意に存在する

一意に存在する ＝ 存在し，それは 1 つしかない



Hilbert 基底の一意性：証明 (1)

- Hilbert 生成系が存在するので，1 つは Hilbert 基底が存在する
- $\boxed{\text{方針}}$：Hilbert 基底が 2 つ存在するとして，矛盾を導く
- C の Hilbert 基底が 2 つ存在すると仮定し，それらをそれぞれ
  $$W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}, \quad W' = \{w'_1, \ldots, w'_{\ell'}\}$$
  とする
- $W \neq W'$ なので，一般性を失わずに，$w'_1 \notin W$ と仮定する
  - 一般性を失わずに $\approx$ 対称な場合をすべて考慮すると
- $w'_1 \in C \cap \mathbb{Z}^n$ で，W は C の Hilbert 基底なので，
  ある非負整数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ が存在して
  $$w'_1 = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j w_j$$

Hilbert 基底の一意性：証明 (2)

- また，$w_j \in C \cap \mathbb{Z}_n$ で，W' は C の Hilbert 基底なので，ある非負整数 $\mu_{j,1}, \ldots, \mu_{j,\ell'}$ が存在して

$$w_j = \sum_{h=1}^{\ell'} \mu_{j,h} w'_h$$

- この 2 式より

$$w'_1 = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\lambda_j \sum_{h=1}^{\ell'} \mu_{j,h} w'_h \right) = \sum_{h=1}^{\ell'} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,h} \right) w'_h$$

- これは w'_1 を $w'_1, \ldots, w'_{\ell'}$ の非負整数結合として表したもの

Hilbert 基底の一意性：証明 (3)

- $\boxed{\text{観察 1}}$：$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,1} > 0$
  - そうでないとすると，w'_1 が $w'_2, \ldots, w'_{\ell'}$ の非負整数結合で表せ，Hilbert 基底の定義 (極小性) に矛盾
- $\boxed{\text{観察 2}}$：$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,1} \leq 1$
  - そうでないとすると，$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,1} \geq 2$ であるが，

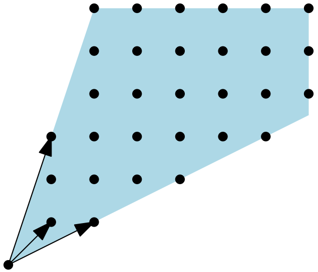
$$-w'_1 = \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,1} - 2 \right) w'_1 + \sum_{h=2}^{\ell'} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,h} \right) w'_h$$

    となり，$-w'_1$ が $w'_1, \ldots, w'_{\ell'}$ の非負結合となる
  - つまり，$-w'_1 \in C$ であるが，$w'_1 \in C$ なので，C が pointed であることに矛盾

Hilbert 基底の一意性：証明 (4)

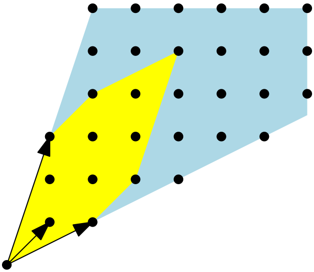
- すなわち，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,1} = 1$
- $\lambda_j, \mu_{j,1}$ は非負整数なので，唯一の $j^* \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対して
  $\lambda_{j^*} = \mu_{j^*,1} = 1$ (他の $j \neq j^*$ に対して $\lambda_j \mu_{j,1} = 0$)
- このとき，$\displaystyle w'_1 = w'_1 + \sum_{h=2}^{\ell'} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,h} \right) w'_h$
- $\therefore$ 任意の $h \neq 1$ に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mu_{j,h} = 0$
- $\therefore$ 任意の $h \neq 1$ と j に対して，$\lambda_j \mu_{j,h} = 0$
- $\lambda_{j^*} = 1$ なので，任意の $h \neq 1$ に対して $\mu_{j^*,h} = 0$
- したがって，$\displaystyle w_{j^*} = \sum_{h=1}^{\ell'} \mu_{j^*,h} w'_h = \mu_{j^*,1} w'_1 = w'_1$
- これは，$w'_1 \notin W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}$ という仮定に矛盾 $\square$

Hilbert 基底の発見法：例



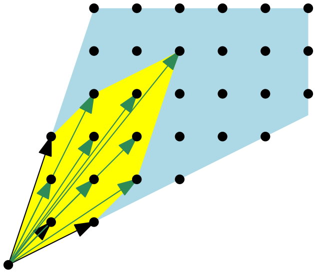
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



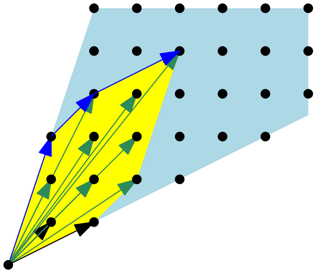
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



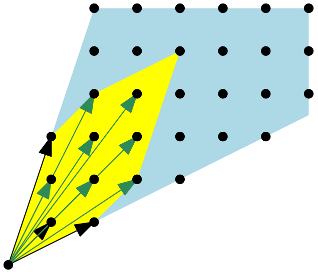
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



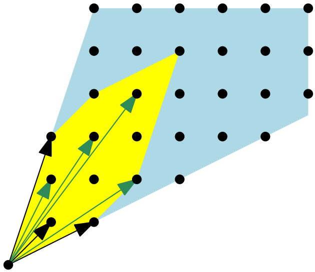
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



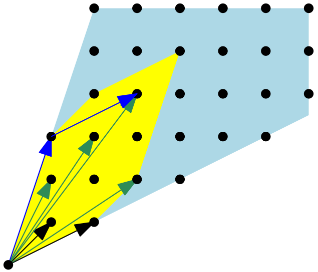
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



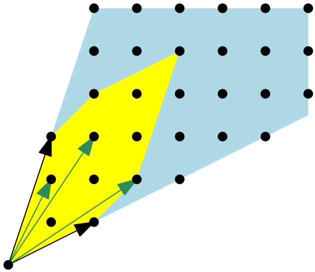
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



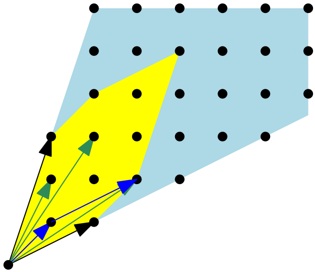
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



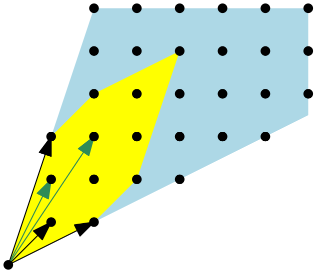
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



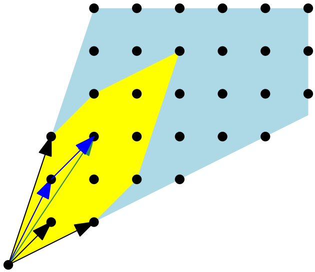
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



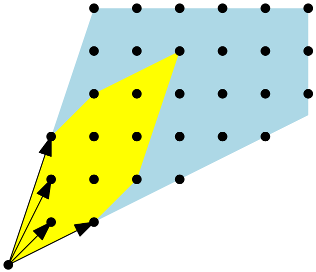
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



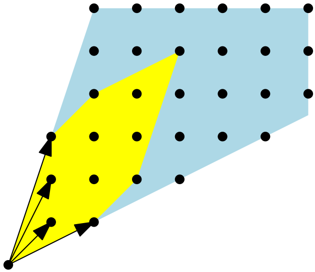
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は？

Hilbert 基底の発見法：例



$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ の生成する凸多面錐の Hilbert 基底は

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

目次

今日の目標

今日の目標

双対問題の整数性を理解する

- 重要概念：Hilbert 生成系，Hilbert 基底

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に,

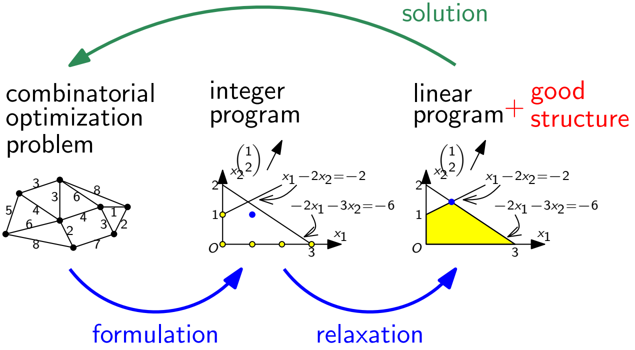
(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\longleftarrow$ 整凸多面体
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\longleftarrow$ 法錐の Hilbert 生成系

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回からはココ

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次