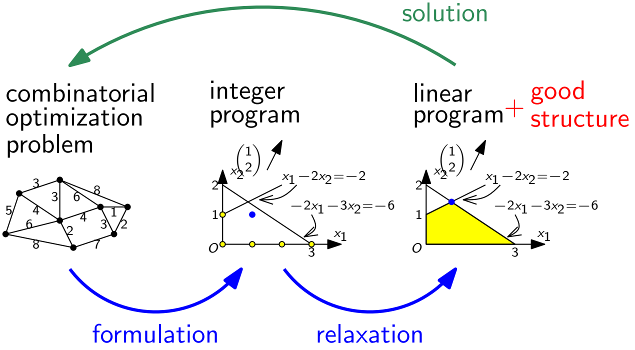
離散最適化基礎論 第 5 回
双対性の幾何学

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 7 日

最終更新：2014 年 11 月 7 日　16:47



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要

- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

事実 (再掲) (証明は省略)

conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域

$\Rightarrow$ (P) の最適値 = (LP) の最適値

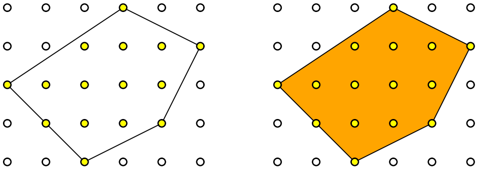
conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域の整凸包なので

conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域である

$\Updownarrow$

(LP) の許容領域が整凸多面体である

$\leadsto$ (LP) の許容領域が整凸多面体となるときが重要に思える



双対問題についても同様だが···

問題点

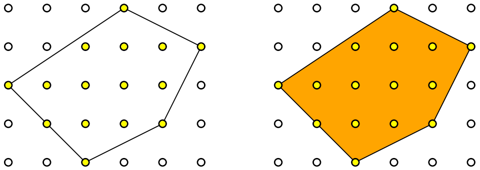
(LP) の許容領域が有界であっても,
(DLP) の許容領域は有界でないかもしれない

そのため，今までの議論がそのまま使えない···

今日の目標

双対問題を幾何学的に理解する方法を使えるようになる

次回以降：「双対問題の整数性」を理解する



今日の目標

双対問題の幾何学を理解する

- 重要概念：法錐 (ほうすい)
- 重要概念：法扇 (ほうせん)

双対問題の幾何学を通して，相補性定理を理解する

- 重要概念：相補性定理

目次

線形計画問題とその双対問題

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

この 2 つを同時に同じ絵で表現しようとしてみる

例

線形計画問題：(P)

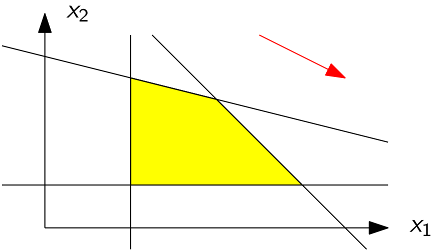
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \le -2, \\ & -x_2 \le -1, \\ & x_1 + x_2 \le 7, \\ & x_1 + 4x_2 \le 16 \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{array}$$



例

線形計画問題：(P)

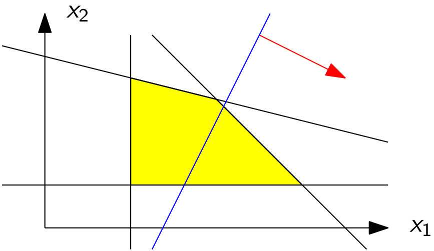
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \leq -2, \\ & -x_2 \leq -1, \\ & x_1 + x_2 \leq 7, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$



例

線形計画問題：(P)

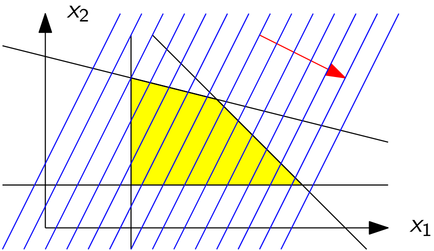
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \leq -2, \\ & -x_2 \leq -1, \\ & x_1 + x_2 \leq 7, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$



例

線形計画問題：(P)

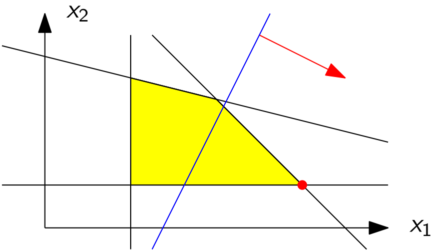
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \le -2, \\ & -x_2 \le -1, \\ & x_1 + x_2 \le 7, \\ & x_1 + 4x_2 \le 16 \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{array}$$



(P) の最適解は $(x_1, x_2) = (6, 1)$
最適値は 11

例 (続き)

線形計画問題：(P)

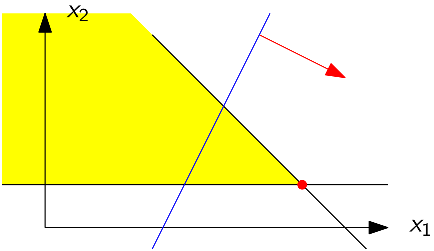
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 \leq -2, \\
 & -x_2 \leq -1, \\
 & x_1 + x_2 \leq 7, \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 16
\end{array}
$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\
 & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$



(P) において，
次の 2 つの制約を取り除いても，
最適解は変わらない

$$
-x_1 \leq -2,
$$
$$
x_1 + 4x_2 \leq 16
$$

例：残された制約が定める超平面の法線ベクトル

線形計画問題：(P)

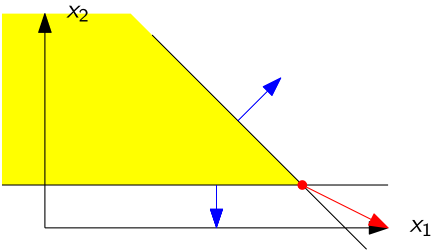
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 \le -2, \\ & -x_2 \le -1, \\ & x_1 + x_2 \le 7, \\ & x_1 + 4x_2 \le 16 \end{aligned}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

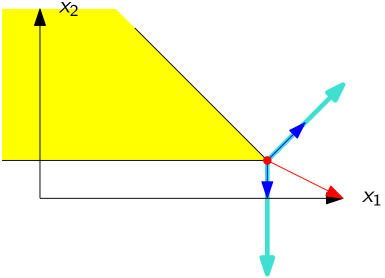
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} \quad & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{aligned}$$



(P) において，
残された制約が定める超平面の
法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例：法線ベクトルの非負結合としての目的方向ベクトル



(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

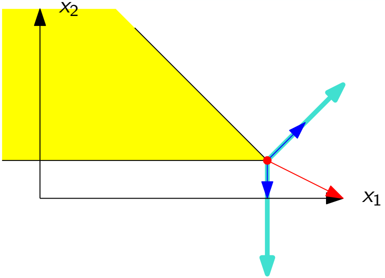
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\
 & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

(P) の目的関数の方向ベクトル $(2, -1)^\top$ を
法線ベクトルの線形結合として表すと

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

となり，その係数は非負となる

例：法線ベクトルの非負結合としての目的方向ベクトル — 解釈



(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = 2, \\
 & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

(D) の制約を次のように書いたとき

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},
$$

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 3, 2, 0)$ が (D) の許容解であることを意味する

- この許容解の目的関数値は 11 であり，(P) の最適値に一致

例：別の目的関数でも試してみる

線形計画問題：(P)

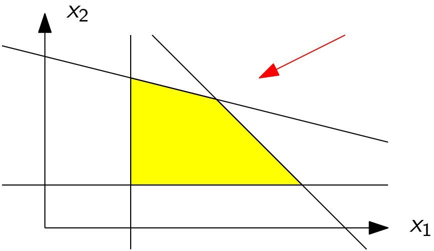
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 \le -2, \\
& -x_2 \le -1, \\
& x_1 + x_2 \le 7, \\
& x_1 + 4x_2 \le 16
\end{aligned}
$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} \quad & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\
& -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}
$$



例：別の目的関数でも試してみる

線形計画問題：(P)

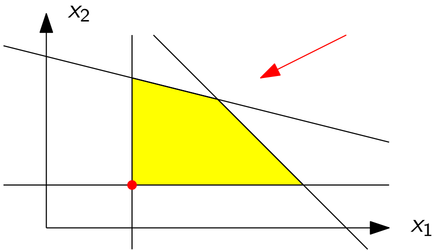
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \leq -2, \\ & -x_2 \leq -1, \\ & x_1 + x_2 \leq 7, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$



(P) の最適解は $(x_1, x_2) = (2, 1)$
最適値は -5

例：別の目的関数でも試してみる

線形計画問題：(P)

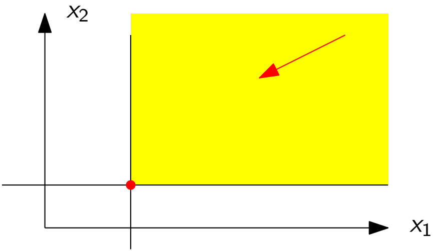
$x \in \mathbb{R}^2$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 \leq -2, \\
& -x_2 \leq -1, \\
& x_1 + x_2 \leq 7, \\
& x_1 + 4x_2 \leq 16
\end{array}
$$

(P) の双対問題：(D)

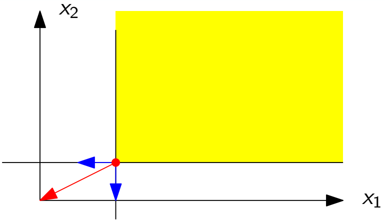
$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\
& -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$



(P) の最適解は $(x_1, x_2) = (2, 1)$
最適値は -5

例：別の目的関数でも試してみる



(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

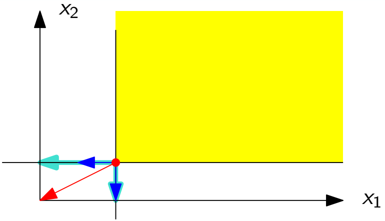
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\
& -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

(P) の目的関数の方向ベクトル $(-2,-1)^\top$ を
法線ベクトルの線形結合として表すと

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり，その係数は非負となる

例：別の目的関数でも試してみる



(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

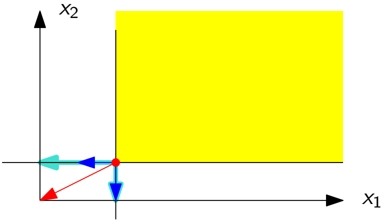
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\
\text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\
 & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

(P) の目的関数の方向ベクトル $(-2, -1)^\top$ を
法線ベクトルの線形結合として表すと

$$
\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

となり，その係数は非負となる

例：別の目的関数でも試してみる



(P) の双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^4$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2y_1 - y_2 + 7y_3 + 16y_4 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 + y_4 = -2, \\ & -y_2 + y_3 + 4y_4 = -1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

(D) の制約を次のように書いたとき

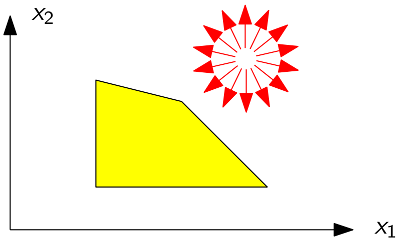
$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (2, 1, 0, 0)$ が (D) の許容解であることを意味する

- この許容解の目的関数値は -5 であり，(P) の最適値に一致

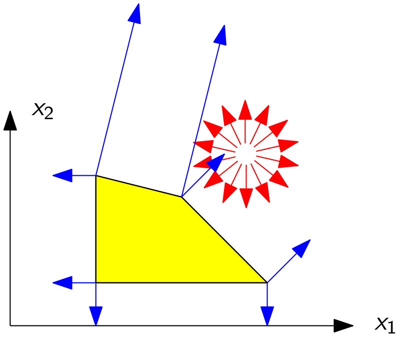
目的関数の方向ベクトルと法線ベクトルの関係 (1)

考えられるすべての目的関数を考えてみる



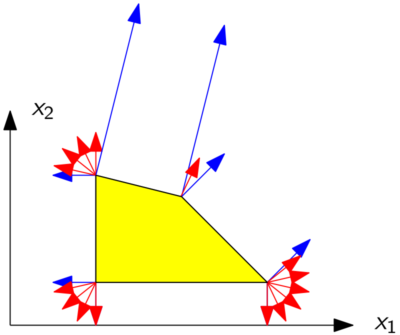
目的関数の方向ベクトルと法線ベクトルの関係 (2)

各制約の定める超平面の法線ベクトルを考える



目的関数の方向ベクトルと法線ベクトルの関係 (3)

法線ベクトルの非負線形結合として方向ベクトルを表す



実は，この表現が双対問題に対応する

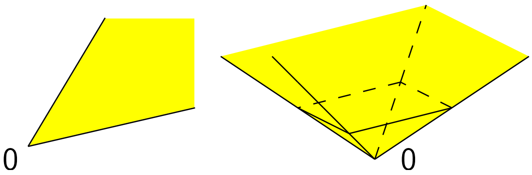
目次

凸錐

凸錐とは？

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸錐 (convex cone) であるとは，次を満たすこと

- $x_1, x_2 \in C$ ならば，$x_1 + x_2 \in C$
- $x \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ ならば，$\lambda x \in C$

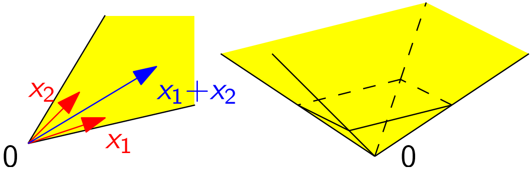


凸錐

凸錐とは？

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸錐 (convex cone) であるとは，次を満たすこと

- $x_1, x_2 \in C$ ならば，$x_1 + x_2 \in C$
- $x \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ ならば，$\lambda x \in C$

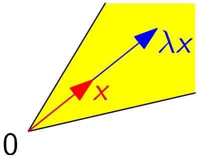


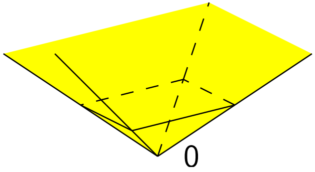
凸錐

凸錐とは？

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸錐 (convex cone) であるとは，次を満たすこと

- $x_1, x_2 \in C$ ならば，$x_1 + x_2 \in C$
- $x \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ ならば，$\lambda x \in C$





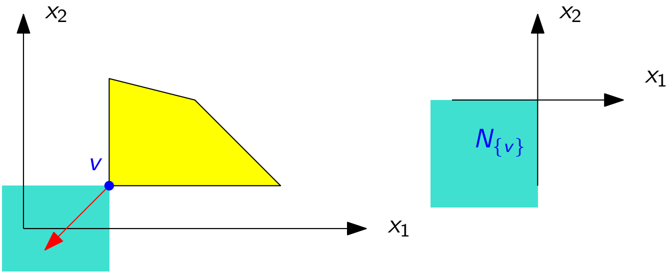
法錐

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

法錐とは？

P の (非空である) 面 F の**法錐** (normal cone) とは

$$N_F = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } x \in F \text{ と } x' \in P \text{ に対して } c^\top x \geq c^\top x'\}$$



つまり，N_F とは，任意の $x \in F$ が P を許容領域とする線形計画問題の最適解となるような目的関数方向全体の集合

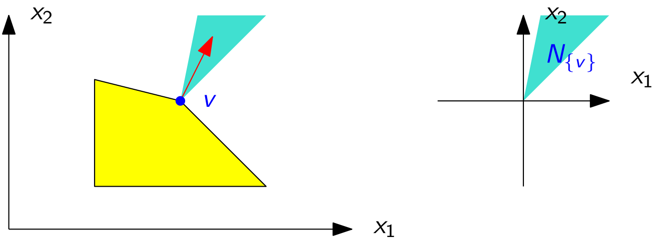
法錐

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

法錐とは？

P の (非空である) 面 F の**法錐** (normal cone) とは

$$N_F = \{c \in \mathbb{R}^n \mid 任意の\ x \in F\ と\ x' \in P\ に対して\ c^\top x \geq c^\top x'\}$$



つまり，N_F とは，任意の $x \in F$ が P を許容領域とする線形計画問題の最適解となるような目的関数方向全体の集合

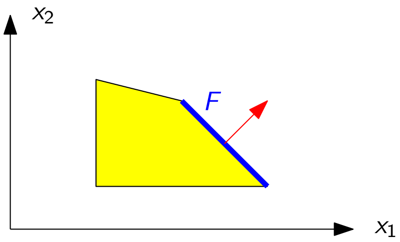
法錐

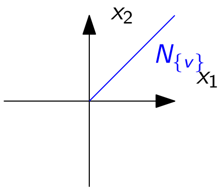
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

法錐とは？

P の (非空である) 面 F の**法錐** (normal cone) とは

$$N_F = \{c \in \mathbb{R}^n \mid 任意の\ x \in F\ と\ x' \in P\ に対して\ c^\top x \geq c^\top x'\}$$





つまり，N_F とは，任意の $x \in F$ が P を許容領域とする線形計画問題の最適解となるような目的関数方向全体の集合

法錐は凸錐

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$，その面 $F \subseteq P$，$F \neq \emptyset$

命題 (法錐は凸錐)

法錐 N_F は凸錐である

証明：凸錐であることの 2 条件を N_F が満たすことを確認

- $c_1, c_2 \in N_F$ とする
- ここで，$c_1 + c_2 \in N_F$ となることを証明する
- 任意の $x \in F$ と $x' \in P$ を考える
- $c_1, c_2 \in N_F$ なので，$c_1^\top x \geq c_1^\top x'$ かつ $c_2^\top x \geq c_2^\top x$
- したがって，

$$(c_1 + c_2)^\top x = c_1^\top x + c_2^\top x \geq c_1^\top x' + c_2^\top x' = (c_1 + c_2)^\top x'$$

- よって，$c_1 + c_2 \in N_F$

法錐は凸錐 (続)

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

命題 (法錐は凸錐)

法錐 N_F は凸錐である

証明 (続き)：

- $c \in N_F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ とする
- このとき，$\lambda c \in N_F$ となることを証明する
- あとは演習問題 □

法錐の表現

設定

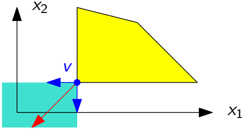
- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
- 「$Ax \leq b$」の第 i 行 $a_i^\top x \leq b_i$

事実 (証明は省略)

P の面 F に対して，添字集合 $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$ を次で定義

$$I = \{i \in \{1,\ldots,m\} \mid a_i^\top x = b_i \quad \forall\, x \in F\}$$

このとき，$N_F = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i \in I \right\}$



$$N_{\{v\}} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \right\}$$

法錐の V 表現と呼ばれる

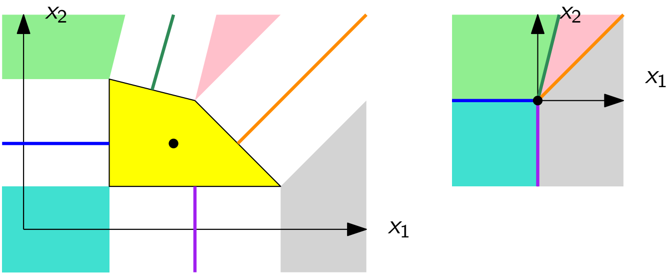
法扇

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

法扇とは？

P の法扇 (normal fan) とは，
P の非空な面の法錐をすべて集めた集合

$$\mathcal{N}(P) = \{ N_F \mid F \text{ は } P \text{ の非空な面} \}$$

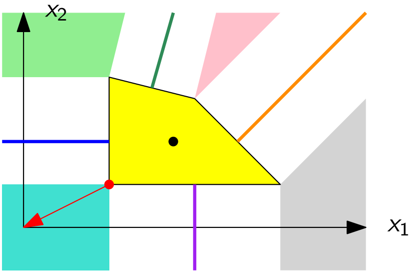


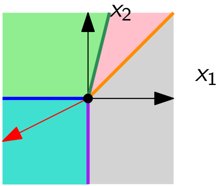
法扇は $\mathbb{R}^n$ を埋め尽くす

法扇と双対問題

直感

双対問題は目的関数の方向ベクトル c が所属する法錐 N_F を見つける問題





これは本当か？

次の目標

この直感の正当化

目次

線形計画問題とその双対問題

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数 $(i \in \{1, \ldots, m\})$

線形計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & a_i^\top x \leq b_i \\ & \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

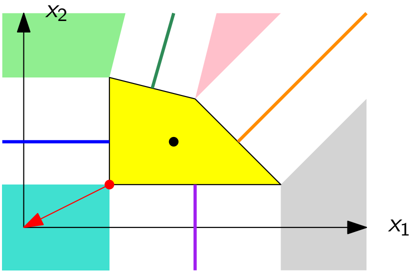
(P) の双対問題：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

x^* を (P) の最適解

- (P) の最適解集合は許容領域の面なので，
- ある添字部分集合 $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ が存在して

$$i \in I \text{ ならば } a_i^\top x^* = b_i$$



線形計画問題とその双対問題

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数 $(i \in \{1, \ldots, m\})$

線形計画問題：(P)

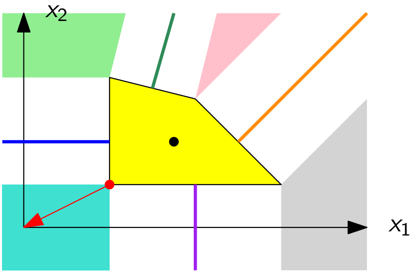
$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & a_i^\top x \leq b_i \\ & \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^m y_i a_i = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

このとき，

- c を非負結合で表すために考える法線ベクトルは $i \in I$ に対する a_i のみ
- つまり，$i \notin I$ に対する a_i の係数は 0



相補性定理

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数 $(i \in \{1,\dots,m\})$

線形計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & a_i^\top x \leq b_i \\ & \quad \forall\, i \in \{1,\dots,m\} \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

相補性定理

(P) の許容解 x^* と (D) の許容解 y^* に対して，次を 2 つは同値

① x^* は (P) の最適解で，y^* は (D) の最適解

② $y_i^* > 0$ ならば，$a_i^\top x^* = b_i$

つまり，x^* と y^* が最適解であるとき，
c は x^* を定義する面の法錐に含まれ，逆も成り立つ

相補性定理：「①⇒②」の証明

「①⇒②」の証明：強双対定理を用いる

強双対定理 (復習)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

- まず，次のように計算

$$c^\top x^* = \left(\sum_{i=1}^m y_i^* a_i\right)^\top x^* = \sum_{i=1}^m y_i^*(a_i^\top x^*) = \sum_{i \in I} y_i^*(a_i^\top x^*)$$

ただし，$I = \{i \in \{1,\ldots,m\} \mid y_i^* > 0\}$

- 一方，$b^\top y^* = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i = \sum_{i \in I} y_i^* b_i$
- 強双対定理より，この 2 つの量は等しい

相補性定理：「①⇒②」の証明 (続)

「①⇒②」の証明 (続き)：したがって，

$$\sum_{i \in I} y_i^* (a_i^\top x^*) = \sum_{i \in I} y_i^* b_i$$

$$\therefore \quad \sum_{i \in I} y_i^* (a_i^\top x^* - b_i) = 0$$

このとき，任意の $i \in I$ に対して，$y_i^* > 0$ であり，また $a_i^\top x^* - b_i \leq 0$ なので，

$$\text{任意の } i \in I \text{ に対して，} a_i^\top x^* - b_i = 0$$

すなわち，$y_i^* > 0$ ならば，$a_i^\top x^* = b_i$ □

相補性定理：「②⇒①」の証明

「②⇒①」の証明：演習問題

- 「①⇒②」の証明の流れを逆行する
- 途中で，弱双対定理 (の系) を用いる

弱双対定理の系 (第 1 回講義スライドより)

x^* が (P) の許容解，y^* が (D) の許容解 のとき

$$c^\top x^* = b^\top y^* \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

相補性定理の系

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数 $(i \in \{1, \dots, m\})$

線形計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & a_i^\top x \leq b_i \\ & \quad \forall\, i \in \{1, \dots, m\} \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^m y_i a_i = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

相補性定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \text{ が (D) の許容解} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m y_i^* (a_i^\top x^* - b_i) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^* \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \text{ が (D) の最適解} \end{array}\right.$$

左の条件は「最適化」という風味を持たず，
x^* と y^* が満たすべき関係だけを述べている

目次

今日の目標

今日の目標

双対問題の幾何学を理解する

- 重要概念：法錐 (ほうすい)
- 重要概念：法扇 (ほうせん)

双対問題の幾何学を通して，相補性定理を理解する

- 重要概念：相補性定理

次回と次々回

双対問題の整数性を理解する

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次