# 離散最適化基礎論 第 4 回
# 凸多面体の整数性

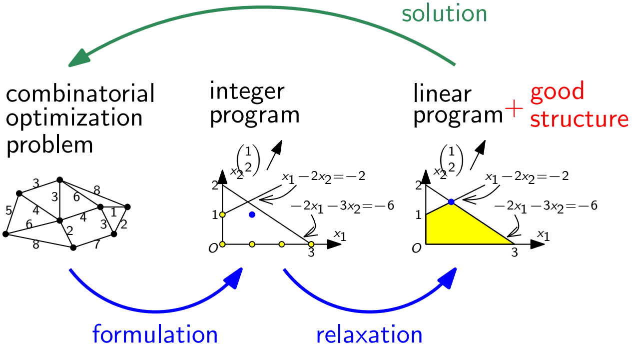
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 31 日

最終更新：2014 年 10 月 31 日　11:07

# この講義のねらい：流れ




- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日もココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

## この講義のねらい

**解きやすい問題**

多項式時間解法が存在する

**解きにくい問題**

NP 困難性が証明されている

**疑問**

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\leadsto$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

**部分的な回答**

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 $=$ 線形計画問題の許容領域

**今回と次回の内容：次の疑問に答える**

「多面体」とは何か？ 「多面体構造」とは何か？

### 今日の目標

凸多面体と不等式系の関係を理解する

- 重要概念：ファセット定義不等式

凸多面体の整数性を理解し，組合せ最適化における重要性を説明できる

- 重要概念：整凸多面体
- 重要概念：整凸包

## 目次

## 線形計画法と面

設定

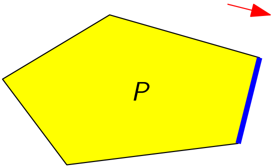
- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 非空な凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

**命題**

次の線形計画問題 (P) を考える (ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数)

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \leq b & (\text{つまり}, x \in P) \end{array}$$

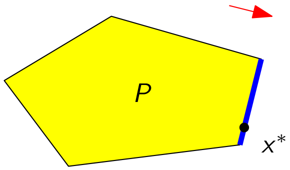
このとき，(P) の最適解全体の集合は凸多面体 $P$ の面である




注：$P$ は有界で非空なので，(P) は必ず最適解を持つ

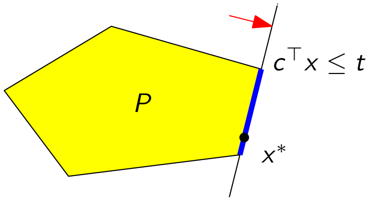
## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)



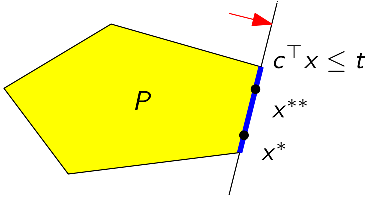
## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)



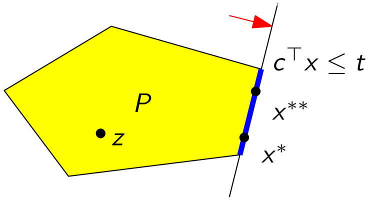
## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)
- (P) の任意の最適解 $x^{**} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^{**} = t$



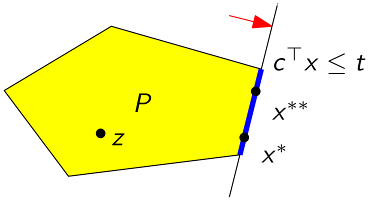
## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)
- (P) の任意の最適解 $x^{**} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^{**} = t$
- すなわち，$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x = t\}$ は (P) の最適解集合



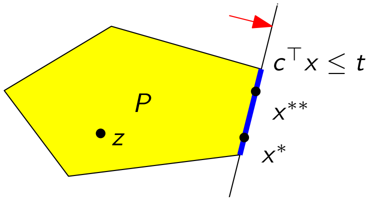
## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)
- (P) の任意の最適解 $x^{**} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^{**} = t$
- すなわち，$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x = t\}$ は (P) の最適解集合
- 最適解の定義より，任意の $z \in P$ に対して，$c^\top z \leq c^\top x^* = t$
- すなわち，$c^\top x \leq t$ は $P$ に対する妥当不等式



## 証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，$t$ は (P) の最適値)
- (P) の任意の最適解 $x^{**} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^{**} = t$
- すなわち，$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x = t\}$ は (P) の最適解集合
- 最適解の定義より，任意の $z \in P$ に対して，$c^\top z \leq c^\top x^* = t$
- すなわち，$c^\top x \leq t$ は $P$ に対する妥当不等式
- したがって，$F$ は $P$ の面 □



## 面の記述

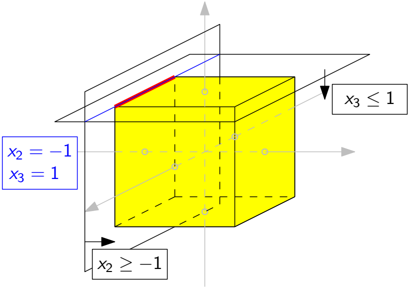
### 設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
- 「$Ax \leq b$」の第 $i$ 行 $a_i^\top x \leq b_i$

### 事実

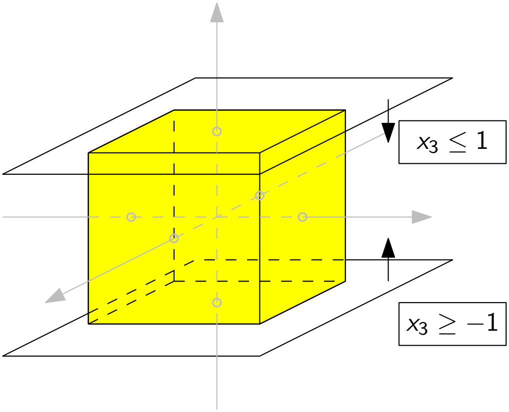
$F$ が $P$ の面 $\Rightarrow$ ある $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ が存在して

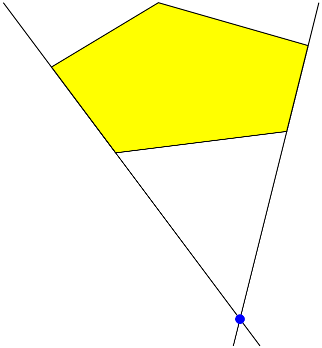
$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



## 面の記述：注意

逆が成り立つとは限らない



## 頂点の記述

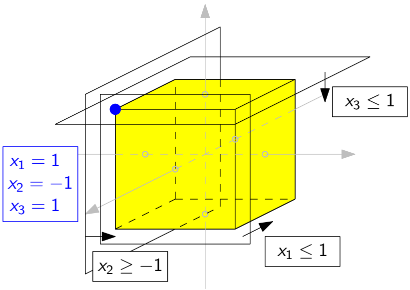
### 設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$，$\dim(P) = n$
- 「$Ax \leq b$」の第 $i$ 行 $a_i^\top x \leq b_i$

### 事実

$v$ が $P$ の頂点 $\Rightarrow$ ある $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ が存在して，$|I| = n$ であり，かつ

$$\{v\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i \ \forall\, i \in I\}$$




逆が成り立つとは限らない

## ファセットの記述

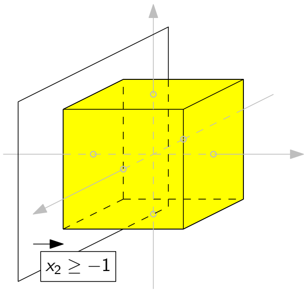
設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$，$\dim(P) = n$
- 「$Ax \leq b$」の第 $i$ 行 $a_i^\top x \leq b_i$

**事実**

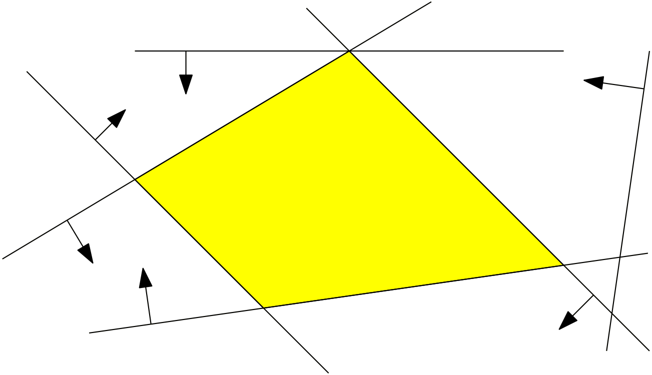
$F$ が $P$ のファセット $\Rightarrow$ ある $i \in \{1, \ldots, m\}$ が存在して，

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i\}$$



## ファセットの記述：注意

逆が成り立つとは限らない



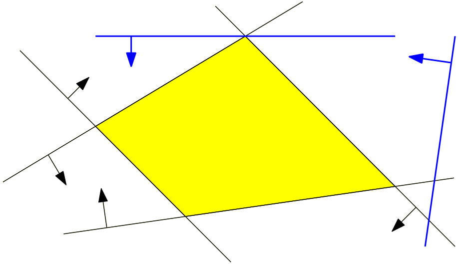
## 冗長な不等式

設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
- 「$Ax \leq b$」の第 $i$ 行 $a_i^\top x \leq b_i$

### 冗長な不等式とは

$a_i^\top x \leq b_i$ が $P$ に対する冗長な不等式であるとは
$Ax \leq b$ から $a_i^\top x \leq b_i$ を取り除いた不等式系 $A'x \leq b'$ に対して
$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b'\}$ が成り立つこと



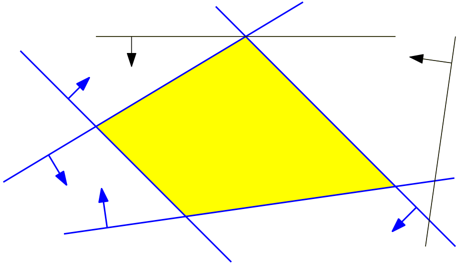
## ファセット定義不等式

### 設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
- 「$Ax \leq b$」の第 $i$ 行 $a_i^\top x \leq b_i$

### ファセット定義不等式とは

$a_i^\top x \leq b_i$ が $P$ のファセット定義不等式であるとは
$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i\}$ が $P$ のファセットであること

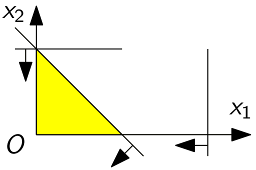


## 冗長な不等式と線形計画問題

### 次の線形計画問題 (P0) を考える

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 \leq 2, x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



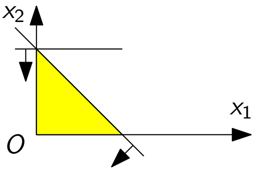

最適解 $(x_1, x_2) = (0, 1)$，最適値 2

## 冗長な不等式と線形計画問題

### (P1) : (P0) から冗長な不等式を 1 つ取り除いた

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



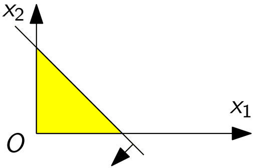

許容集合は変わらない ($\therefore$ 最適解も変わらない)

## 冗長な不等式と線形計画問題

### (P2) : (P1) から冗長な不等式を 1 つ取り除いた

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



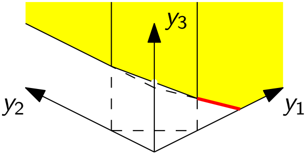

許容集合は変わらない (∴ 最適解も変わらない)

## 冗長な不等式と線形計画問題

### (D0)：(P0) の双対問題

$y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & y_1 + 2y_2 + y_3 \\ \text{subject to} & y_1 + y_2 \geq 1, y_1 + y_3 \geq 2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$



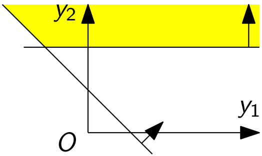

最適解 $(y_1, y_2, y_3) \in \mathrm{conv}\{(1,0,1),(2,0,0)\}$，最適値 2

## 冗長な不等式と線形計画問題

### (D1)：(P1) の双対問題

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 \geq 1, y_2 \geq 2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



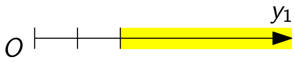

最適解 $(y_1, y_2) = (-1, 2)$，最適値 2

## 冗長な不等式と線形計画問題

### (D2)：(P2) の双対問題

$y_1 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & y_1 \\ \text{subject to} & y_1 \geq 1, y_1 \geq 2, y_1 \geq 0 \end{array}$$




最適解 $y_1 = 2$，最適値 2

## 冗長な不等式と線形計画問題：まとめ

主問題 (P)，双対問題 (D)

- (P) の許容領域から冗長な不等式を取り除いても，(P) の許容領域は変わらない
- (P) の許容領域から冗長な不等式を取り除くと，(D) が変わる

$\rightsquigarrow$ 冗長な不等式は (P) においては「無駄」であるが (D) においては「無駄」でないかもしれない…

$\rightsquigarrow$ 次回以降

## 目次

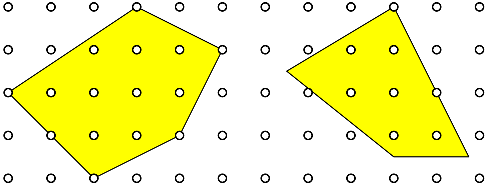
## 整凸多面体

凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

### 整凸多面体とは？

$P$ が整凸多面体であるとは，
$P$ のすべての面が整数点を含むこと
($P$ は有界なので，$P$ のすべての頂点が整数点であることと同値)

整数点：すべての座標が整数である点



整凸多面体である　　整凸多面体ではない

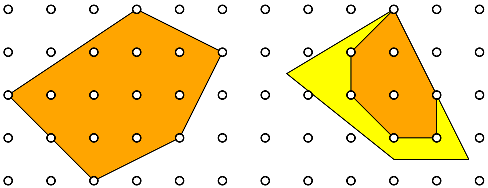
## 整凸包

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

### 整凸包とは？

$S$ の整凸包とは，$\mathrm{conv}(S \cap \mathbb{Z}^n)$ のこと

オレンジの集合が黄色の集合の整凸包

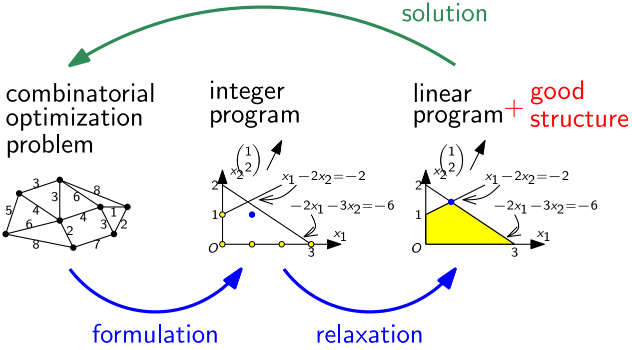


### 事実

有界な集合の整凸包は整凸多面体

# 目次

# この講義のねらい：流れ




- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日もココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

## 整数計画問題の線形計画緩和 (第 1 回講義スライドより)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

### 整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

### (DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \ge 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

### (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \end{aligned}$$

### (LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \ge 0 \end{aligned}$$

### 観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

## 整数計画問題の線形計画緩和 (第 1 回講義スライドより)

### 観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

### すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！
  - すなわち，(P) が多項式時間で解ける !?

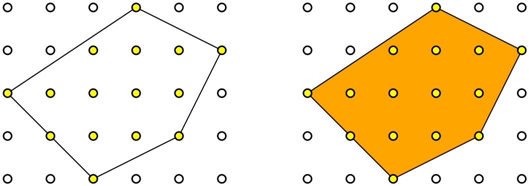
最後のステップは慎重な議論が必要

# 整数計画問題の線形計画緩和と整凸多面体

## 観察

(P) の許容領域 = (LP) の許容領域 ⇒ (P) の最適値 = (LP) の最適値

(P) の許容領域は整数点の集合なので，この仮定は成り立たなさそう



# 整数計画問題の線形計画緩和と整凸多面体

## 観察

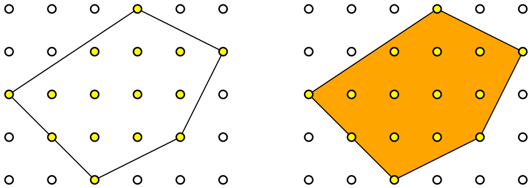
(P) の許容領域 $=$ (LP) の許容領域 $\Rightarrow$ (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値

(P) の許容領域は整数点の集合なので，この仮定は成り立たなさそう

## 事実 (証明は省略)

$\mathrm{conv}($(P) の許容領域$)$ $=$ (LP) の許容領域

$\Rightarrow$ (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値



## 整数計画問題の線形計画緩和と整凸多面体

**事実 (再掲)** (証明は省略)

conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域

$\Rightarrow$ (P) の最適値 = (LP) の最適値

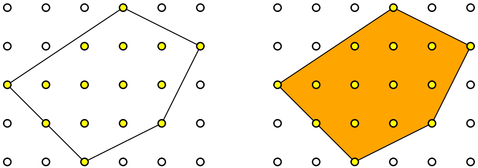
conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域の整凸包なので

$$\boxed{\text{conv((P) の許容領域) = (LP) の許容領域である}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{(LP) の許容領域が整凸多面体である}}$$

$\rightsquigarrow$ (LP) の許容領域が整凸多面体となるときが重要に思える



## 目次

## 今日の目標

### 今日の目標

凸多面体と不等式系の関係を理解する

- 重要概念：ファセット定義不等式

凸多面体の整数性を理解し，組合せ最適化における重要性を説明できる

- 重要概念：整凸多面体
- 重要概念：整凸包

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

## 目次