

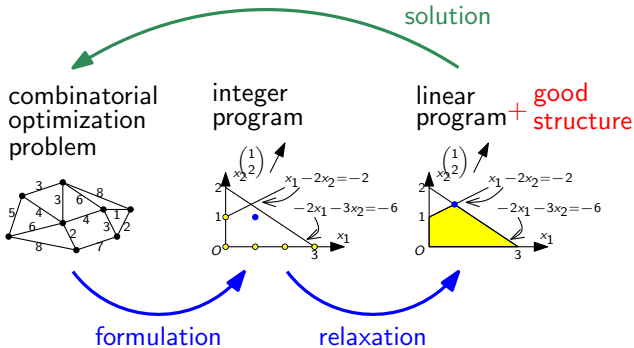
離散最適化基礎論 第 3 回
凸多面体の基礎

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 24 日

最終更新：2014 年 11 月 2 日 08:41



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日はココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

↪ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 = 線形計画問題の許容領域

今回と次回の内容：次の疑問に答える

「多面体」とは何か？ 「多面体構造」とは何か？

今日の目標

凸多面体の基礎を理解し，凸多面体の構造が記述できるようになる

- ▶ 重要概念：凸多面体のV表現 (凸結合による)
- ▶ 重要概念：凸多面体のH表現 (不等式系による)
- ▶ 重要概念：凸多面体の面

目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ

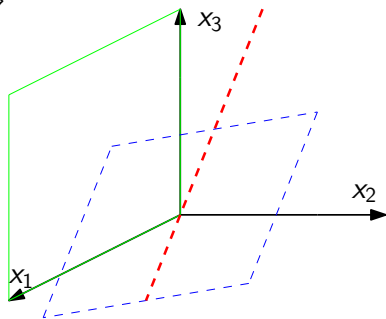
復習：線形部分空間

線形部分空間とは？

\mathbb{R}^n の線形部分空間とは、

ある行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ を用いて $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ と書ける集合のこと

$$\text{例：} \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



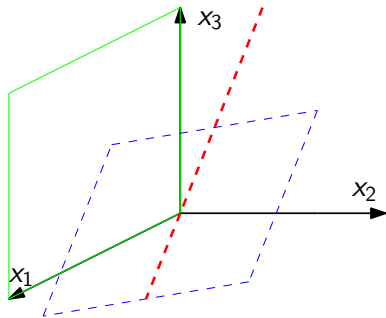
これは原点と $(-1, 0, 2)^T$ を通る直線

復習：線形部分空間の次元

線形部分空間の次元とは？

線形部分空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ の次元は、 $n - \text{rank}(A)$ のこと

$$\text{rank}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$



\therefore この線形部分空間の次元 $= 3 - 2 = 1$

復習：線形結合

線形結合とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の線形結合とは、
ある実数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと

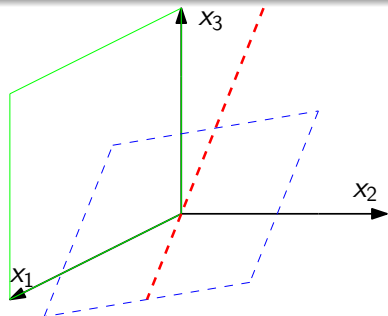
復習：線形包

線形包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の線形包とは,
 p_1, p_2, \dots, p_k の線形結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

例： $p_1 = (-1, 0, 2)^\top$



これは $(-1, 0, 2)^\top$ の線形包

復習：線形部分空間の記述

事実：線形部分空間 = 線形包

- 1 任意の $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ に対して、ある $p_1, p_2, \dots, p_{n-k} \in \mathbb{R}^n$ が存在して、

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R} \right\}$$

- 2 任意の $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ に対して、ある $A \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ が存在して、

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

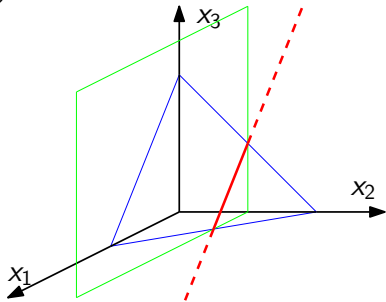
これは線形代数における基礎的な事実

アフィン部分空間

アフィン部分空間とは？

\mathbb{R}^n のアフィン部分空間とは、ある行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^k$ を用いて $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ と書ける集合のこと

$$\text{例 : } \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



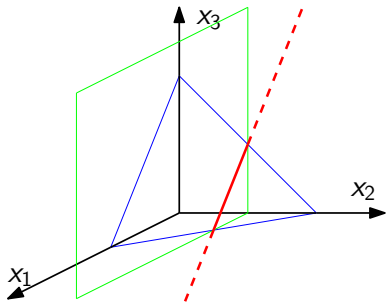
これは $(1/2, 1, 0)^T$ と $(0, 1, 1)^T$ を通る直線

アフィン部分空間の次元

アフィン部分空間の次元とは？

アフィン部分空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ の次元は、 $n - \text{rank}(A)$ のこと

$$\text{rank}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$



\therefore このアフィン部分空間の次元 $= 3 - 2 = 1$

アフィン結合

アフィン結合とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ のアフィン結合とは,

$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たすある実数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと

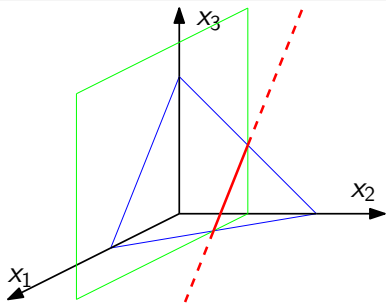
アフィン包

アフィン包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ のアフィン包とは、
 p_1, p_2, \dots, p_k のアフィン結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

$$p_1 = (1/2, 1, 0)^T, p_2 = (0, 1, 1)^T$$



これは $(1/2, 1, 0)^T$ と $(0, 1, 1)^T$ のアフィン包

アフィン部分空間の記述

命題：アフィン部分空間 = アフィン包

- 1 任意の $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^k$ に対して,
ある $p_1, p_2, \dots, p_{n-k+1} \in \mathbb{R}^n$ が存在して,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k+1} \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

- 2 任意の $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ に対して,
ある $A \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^k$ が存在して,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

超平面

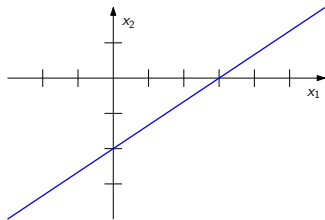
超平面 (hyperplane) とは？

\mathbb{R}^n における超平面とは， $n-1$ 次元アフィン部分空間

つまり，あるベクトル $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$$

と書ける集合のこと



$n=2$ のときの例： $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 6\}$

超平面

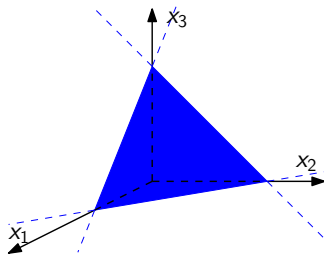
超平面 (hyperplane) とは？

\mathbb{R}^n における超平面とは、 $n-1$ 次元アフィン部分空間

つまり、あるベクトル $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$$

と書ける集合のこと



$n=3$ のときの例： $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$

閉半空間

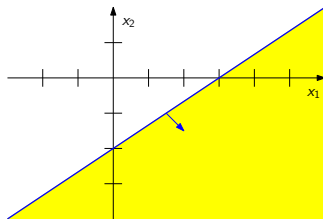
閉半空間 (closed halfspace) とは？

\mathbb{R}^n における閉半空間とは,
あるベクトル $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$$

と書ける集合のこと

$n = 2$ のときの例： $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 \leq 6\}$



閉半空間の境界は超平面

目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ

凸結合

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$

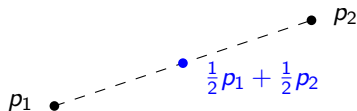
凸結合とは？

p_1, p_2, \dots, p_k の凸結合とは,

$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たすある 非負 実数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと



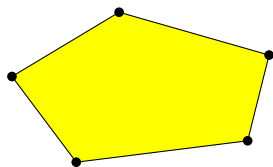
凸包

凸包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の凸包とは,
 p_1, p_2, \dots, p_k の凸結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

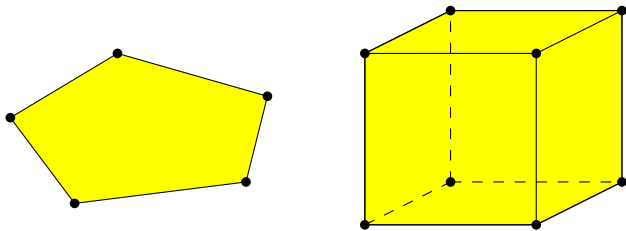
集合 S の凸包を $\text{conv}(S)$ で表す



V 多面体 (凸包による凸多面体の定義)

V 多面体とは？

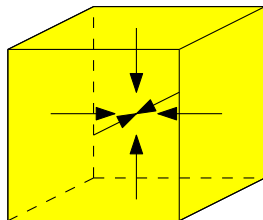
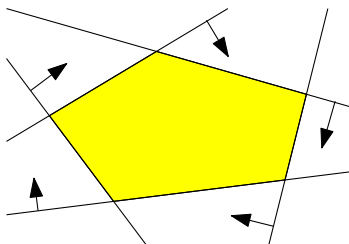
V 多面体とは有限個の点の凸包のこと



H 多面体 (不等式系による凸多面体の定義)

H 多面体とは？

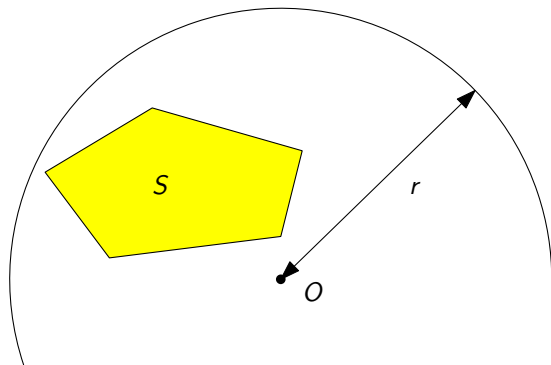
H 多面体とは有限個の閉半空間の共通部分で有界なもののこと



有界性

有界であるとは？

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が**有界**であるとは、ある実数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $x \in S$ に対して $\|x\| \leq r$ となること



凸多面体の基本定理：Minkowski–Weyl の定理

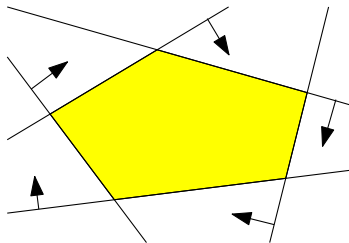
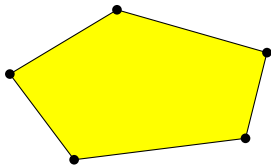
事実：Minkowski–Weyl の定理

(証明はしない)

- ▶ V 多面体は H 多面体である
- ▶ H 多面体は V 多面体である

この同値性をもって、

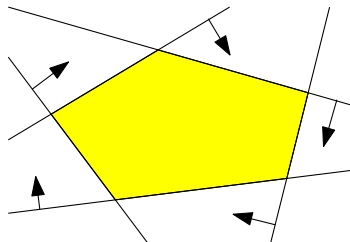
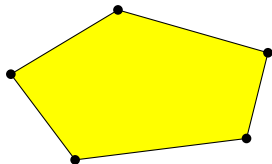
凸多面体とは、V 多面体、あるいは、H 多面体のこと



凸多面体の表現

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

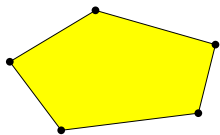
- ▶ P を有限個の点の凸包として記述したものを P の **V 表現** と呼ぶ
- ▶ P を有限個の閉半空間の共通部分として記述したものを P の **H 表現** と呼ぶ



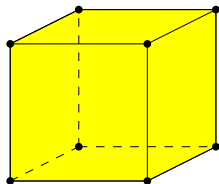
凸多面体の次元

凸多面体の次元とは？

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の次元とは、 P を含むアフィン部分空間の次元の最小値



$$\dim(P) = 2$$



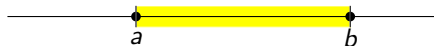
$$\dim(P) = 3$$

目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ

閉区間

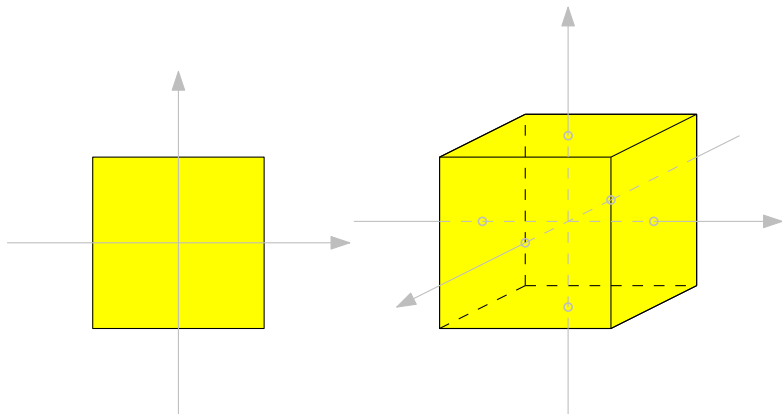
閉区間 $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ は凸多面体 (ただし, $a \leq b$)



- ▶ V 表現 : $I = \text{conv}(\{a, b\})$
- ▶ H 表現 : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a, x \leq b\}$
- ▶ $\dim(I) = \begin{cases} 1 & (a < b \text{ のとき}) \\ 0 & (a = b \text{ のとき}) \end{cases}$

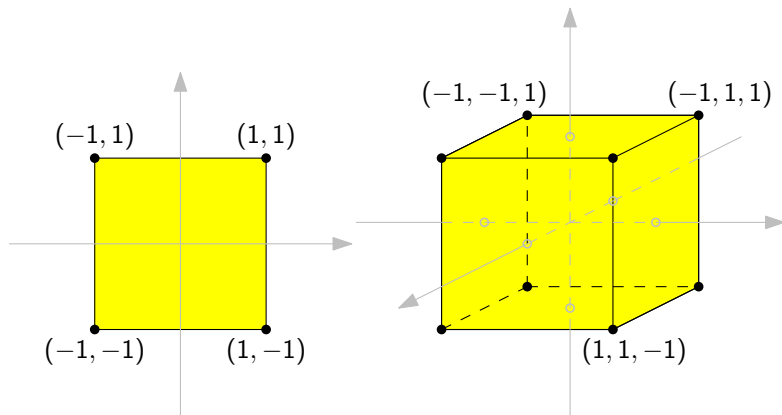
立方体

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと



立方体：V 表現

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

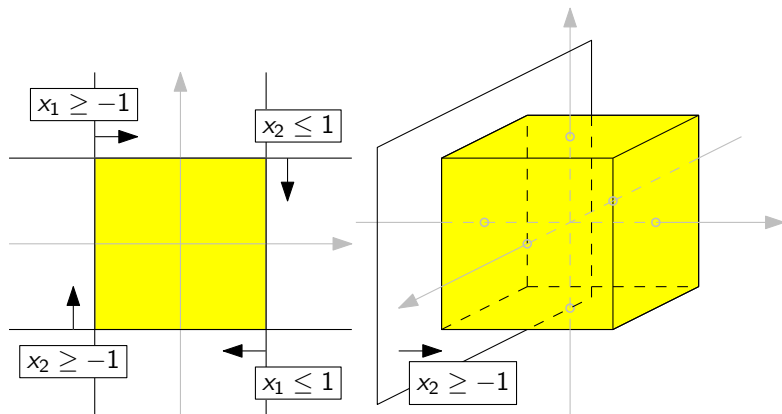


V 表現：

$$C_n = \text{conv}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1, 1\} \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}\})$$

立方体：H 表現

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

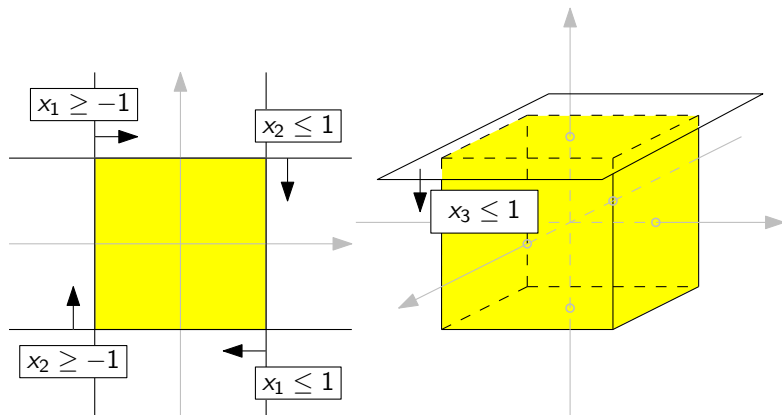


H 表現：

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1 \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

立方体：H 表現

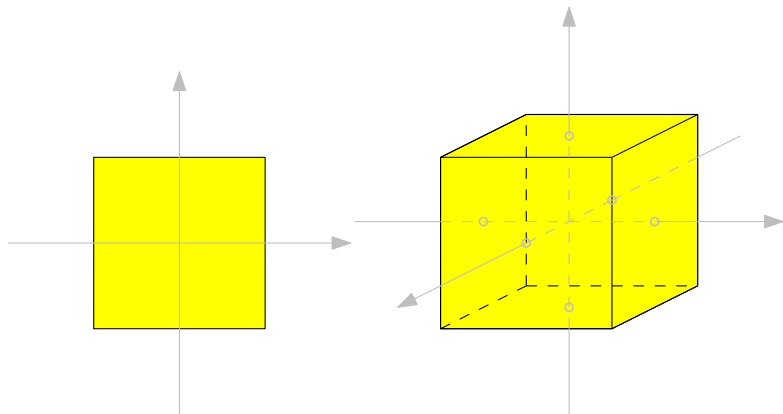
n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと



H 表現：

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1 \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

立方体：次元

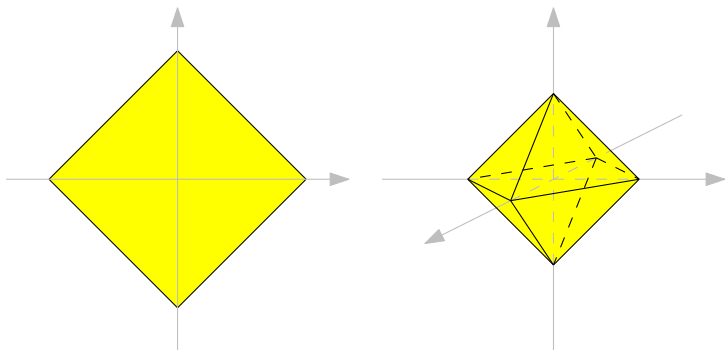
 n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

次元：

$$\dim(C_n) = n$$

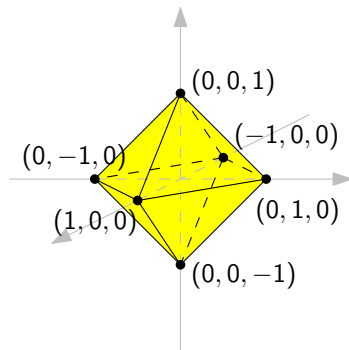
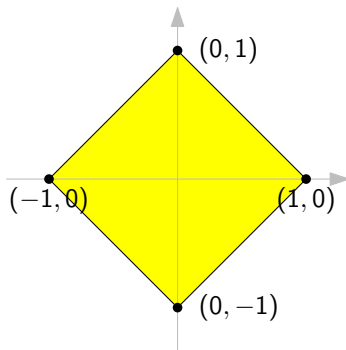
十字多面体

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$



十字多面体 : V 表現

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$

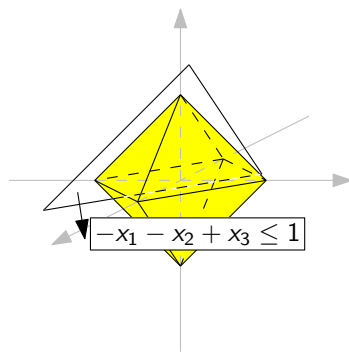
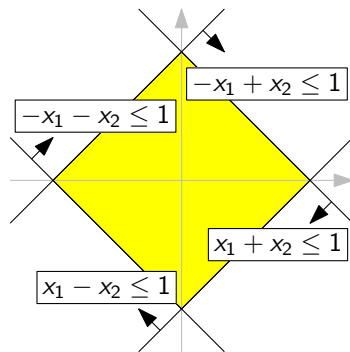


V 表現 : e_i を第 i 標準基底ベクトルとして

$$C_n^* = \text{conv}(\{e_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{-e_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\})$$

十字多面体 : H 表現

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$

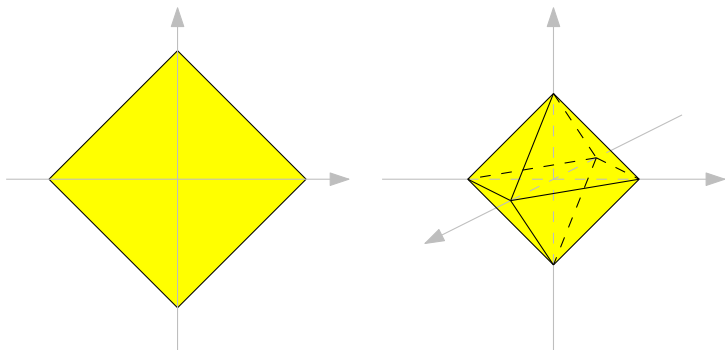


H 表現 :

$$C_n^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq 1, s_i \in \{-1, 1\} \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

十字多面体：次元

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$



次元：

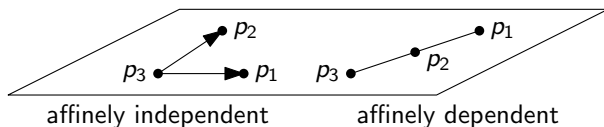
$$\dim(C_n^*) = n$$

アフィン独立性

単体を定義するために、まずアフィン独立性を定義する

アフィン独立性とは？

点集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ がアフィン独立であるとは、ベクトル $p_1 - p_k, p_2 - p_k, \dots, p_{k-1} - p_k$ が線形独立であること



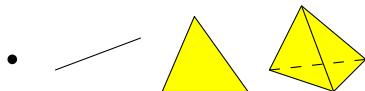
性質 (線形代数に関する演習問題)

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ がアフィン独立 $\Rightarrow |P| \leq n + 1$

単体

単体

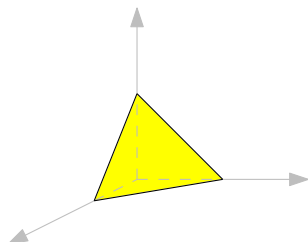
n 次元単体とは, $n + 1$ 個のアフィン独立な点の集合の凸包



単体：標準的な構成法

 n 次元標準単体

$$\Delta_n = \text{conv}(\{e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid i \in \{1, \dots, n+1\}\})$$



補足： Δ_n は \mathbb{R}^{n+1} の部分集合だが， $\dim(\Delta_n) = n$

目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ

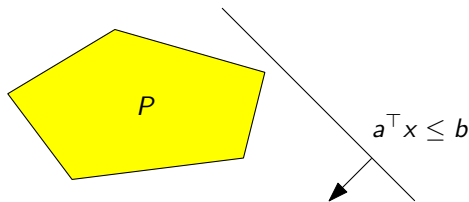
妥当不等式

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

妥当不等式とは？

 P に対する妥当不等式とは、 $a \in \mathbb{R}^n$ と $b \in \mathbb{R}$ を用いた不等式 $a^\top x \leq b$ で、任意の $z \in P$ に対して、 $a^\top z \leq b$

を満たすもののこと

半空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$ が P を含む

凸多面体の面

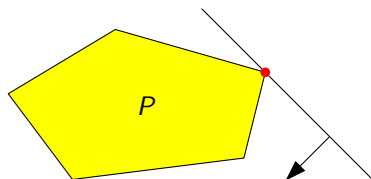
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の面とは？

 P の面とは, P に対する妥当不等式 $a^T x \leq b$ を用いて

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$$

と書ける集合のこと



凸多面体の面

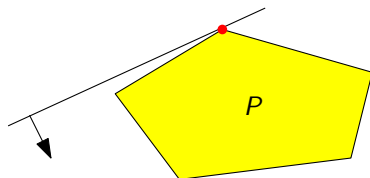
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の面とは？

 P の面とは、 P に対する妥当不等式 $a^T x \leq b$ を用いて

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$$

と書ける集合のこと



凸多面体の面

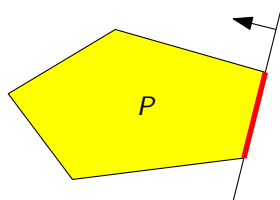
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の面とは？

 P の面とは, P に対する妥当不等式 $a^T x \leq b$ を用いて

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$$

と書ける集合のこと



特殊な面

任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

▶ P は P の面

▶ $a = 0, b = 0$ とすると, $\{x \mid a^\top x = b\} = \mathbb{R}^d$ なので,

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \mathbb{R}^d = P$$

▶ \emptyset は P の面

▶ $a = 0, b = 1$ とすると, $\{x \mid a^\top x = b\} = \emptyset$ なので,

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \emptyset = \emptyset$$

凸多面体の面は凸多面体

命題

凸多面体の面は凸多面体

証明：任意の凸多面体 P の任意の面 $F \subseteq P$ を考える

- ▶ $F = P \cap \{x \mid a^\top x = b\}$ とすると
 $F = P \cap \{x \mid a^\top x \leq b\} \cap \{x \mid a^\top x \geq b\}$
- ▶ P は凸多面体なので、有限個の閉半空間の共通部分
- ▶ $\therefore F$ も有限個の閉半空間の共通部分
- ▶ $\therefore F$ は凸多面体



凸多面体の頂点とファセット

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の頂点とは？

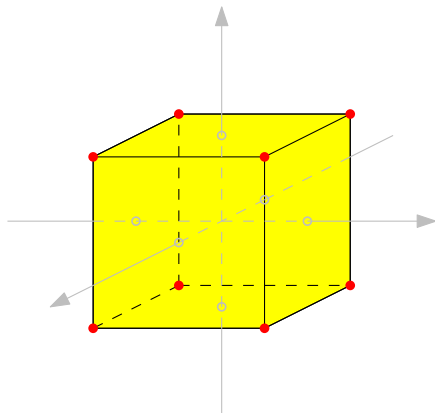
P の頂点とは、 P の面で次元が 0 のもの

凸多面体のファセットとは？

P のファセットとは、 P の面で次元が $\dim(P) - 1$ のもの

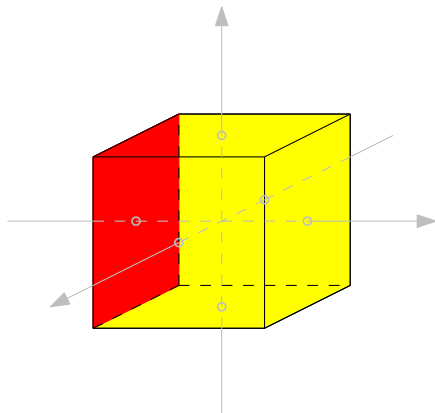
例：頂点

3次元立方体に，頂点は8個ある



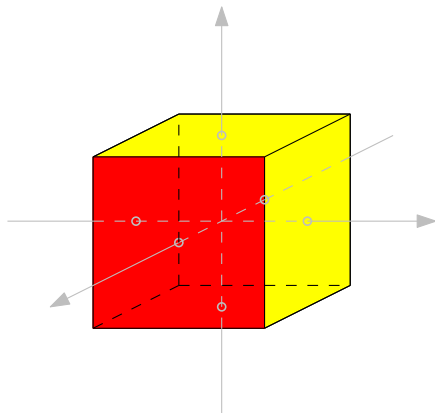
Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある



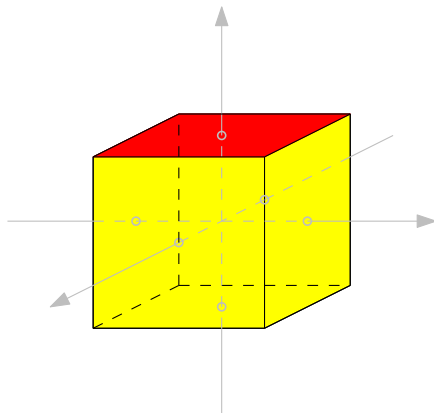
Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある



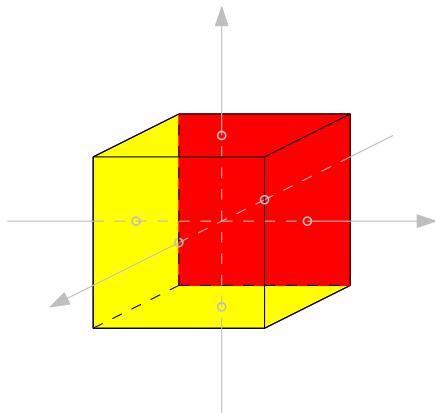
Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある



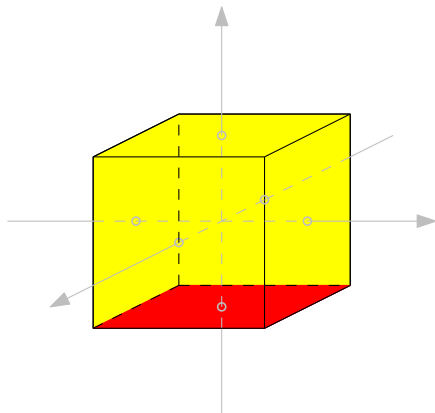
Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある



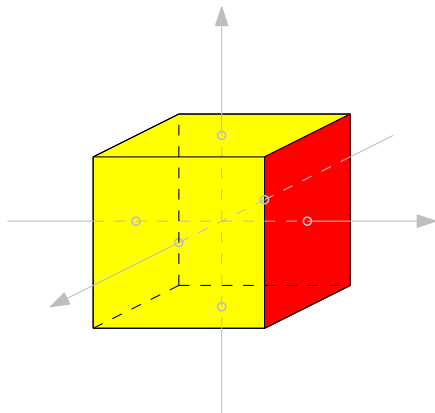
Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある



Example: Facets

3次元立方体に、ファセットは6個ある

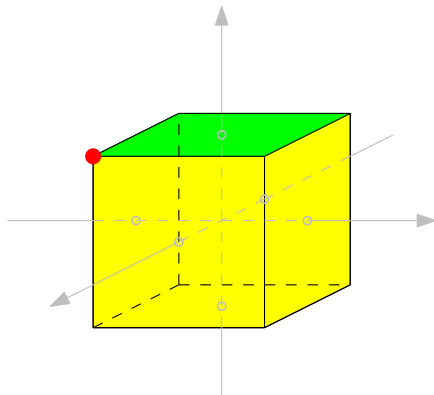


凸多面体の面の面は凸多面体の面

事実

(証明は省略)

$$\left. \begin{array}{l} P : \text{凸多面体} \\ F \subseteq P : P \text{の面} \\ F' \subseteq F : F \text{の面} \end{array} \right\} \Rightarrow F' : P \text{の面}$$

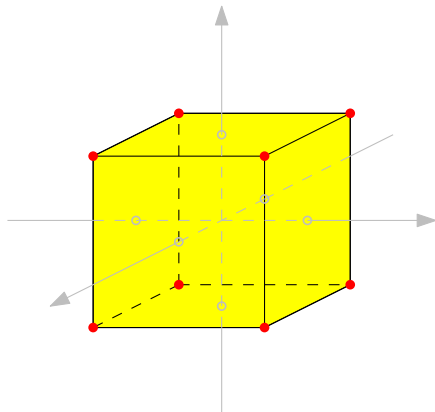


凸多面体はその頂点集合の凸包

事実

(証明は省略)

$$\left. \begin{array}{l} P : \text{凸多面体} \\ V : P \text{ の頂点全体の集合} \end{array} \right\} \Rightarrow P = \text{conv}(V)$$



目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

凸多面体の基礎を理解し，凸多面体の構造が記述できるようになる

- ▶ 重要概念：凸多面体のV表現 (凸結合による)
- ▶ 重要概念：凸多面体のH表現 (不等式系による)
- ▶ 重要概念：凸多面体の面

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① アフィン結合とアフィン部分空間
- ② 凸多面体の定義と同値性
- ③ 凸多面体の例
- ④ 凸多面体の面
- ⑤ 今日のまとめ