離散最適化基礎論 第 1 回
線形計画問題と整数計画問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 3 日

最終更新：2014 年 10 月 10 日　10:57

概要

目標

離散最適化のトピックの１つとして
組合せ最適化における線形計画法の利用を取り上げ

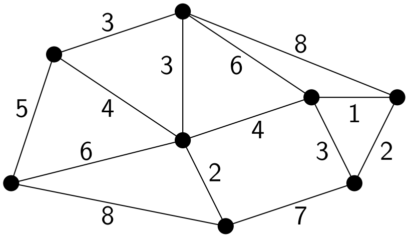
- 離散最適化と連続最適化の関係を理解する
- 幾何学的視点の重要性を理解する
- キーワード：緩和，双対性，整数性

なぜ講義で取り扱う？

- 「組合せ最適化の神髄」だから

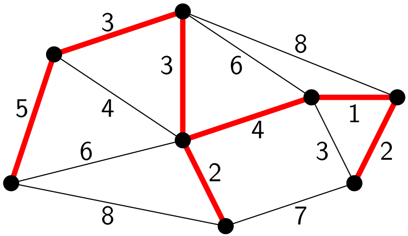
テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような重み和最小のネットワークを作る



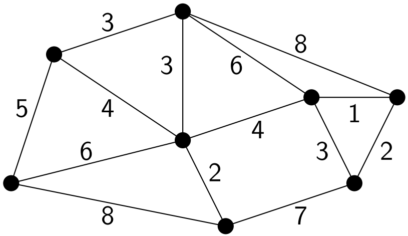
テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような
重み和最小のネットワークを作る



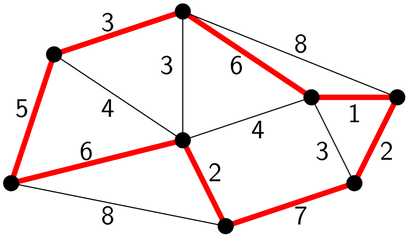
テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような重み和最小の巡回路を作る



テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような重み和最小の巡回路を作る



テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- …

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- …

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- …

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- …

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

スケジュール 前半 (予定)

1. 線形計画問題と整数計画問題 (10/3)
2. 組合せ最適化問題と整数計画問題 (10/10)

⋆ 休講 (国内出張) (10/17)

3. 凸多面体の基礎 (10/24)
4. 凸多面体の整数性 (10/31)
5. 双対性の幾何学 (11/7)
6. 完全双対整数性 (11/14)

⋆ 休講 (調布祭) (11/21)

7. 完全双対整数性の幾何学 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8	完全双対整数性：ネットワークフロー	(12/5)
9	完全双対整数性：全域木	(12/12)
10	完全双対整数性：マッチング	(12/19)
⋆	冬季休業	(12/26, 1/2)
11	整数性ギャップ：下界	(1/9)
⋆	休講 (センター試験準備)	(1/16)
12	整数性ギャップ：上界	(1/23)
⋆	休講 (海外出張)	(1/30)
13	まとめ (または，最近のトピック)	(2/6)
⋆	期末試験	(2/13?)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/fdopt/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義当日の昼 12 時までに，ここに置かれる
- Twitter (@okamoto7yoshio)：置かれたことを知らせる tweet

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/fdopt/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (80 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (10 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要
- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限 (岡本居室か CED)
- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の最後 10 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

解答の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい (すること推奨)
- レポートを提出するならば，期限内に提出しないといけない (再提出は原則期限なし)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートはコメントが付けられて，返却される

評価

期末試験のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- B. コルテ，J. フィーゲン (著)，浅野孝夫，浅野泰仁，小野孝男，平田富夫 (訳),『組合せ最適化 第 2 版』，丸善出版，2012 年.
- W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1997.
- A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer, 2002.
- その他，研究論文

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

線形計画問題の例

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

読み方

- 「maximize」の後に書いてある関数を最大化する
- 「subject to」の後に書いてある式を満たす x_1, x_2 の中で

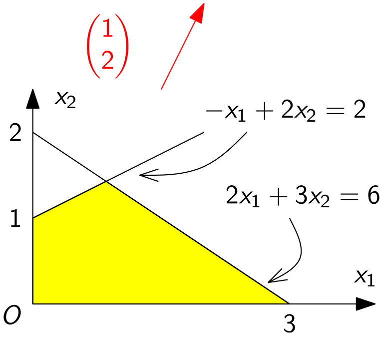
線形計画問題の例：図

図を描いてみる

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$



線形計画問題の例：図

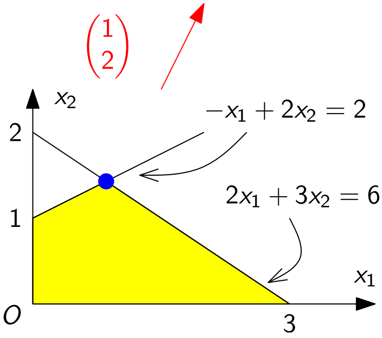
線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 6/7, x_2 = 10/7$ は最適解
- 最適値は $26/7$



線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- 目的関数 (objective function)：最大化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \leftarrow \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 目的関数 (objective function)：最大化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \ \leftarrow \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \ \leftarrow \\ & x_1 \ge 0, \ \leftarrow \\ & x_2 \ge 0 \leftarrow \end{aligned}$$

- 目的関数 (objective function)：最大化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 目的関数 (objective function)：最大化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題

線形計画問題 (linear program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{rll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \le b & \leftarrow \text{成分ごとに「}\le\text{」} \end{array}$$

先ほどの例：

- $m = 4,\ n = 2$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

線形計画問題の例：行列とベクトルで書いてみる

線形計画問題の例

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\
 & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\
 & x_1 \ge 0, \\
 & x_2 \ge 0
\end{array}
$$

行列とベクトルで書いてみる

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\text{subject to} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\text{許容領域} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array} \right\}
$$

線形計画問題：別の表現

線形計画問題：別の表現

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimize} & c^\top x & \\
\text{subject to} & Ax = b & \leftarrow \text{成分ごとに「}=\text{」} \\
 & x \geq 0 & \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」}
\end{array}
$$

制約は次の形であればよい

- 線形の等式
- 線形の (等号付き) 不等式

目的は次の形であればよい

- 線形関数の最大化
- 線形関数の最小化

最適解と最適値

線形計画問題 (P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{rll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \leq b & \leftarrow \text{成分ごとに「}\leq\text{」} \end{array}$$

(P) の最適解と最適値とは？

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の**最適解** (optimal solution) であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

このとき，$c^\top x^*$ を (P) の**最適値** (optimal value) と呼ぶ

注：「最適解」と「最適値」は明確に異なる概念

目次

線形計画問題の双対問題

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形計画問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)　　これも線形計画問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

双対問題の「意味」は講義『数理計画法』を参照

線形計画問題の弱双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

線形計画問題の弱双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \ge 0 \end{array}$$

弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow c^\top x \le b^\top y$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \leq b$ .... (1)

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると,

- $Ax \le b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると,

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \ge 0$ .... (3)

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって，

$$c^\top x$$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると,

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると,

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって,

$$c^\top x \overset{(2)}{=} (A^\top y)^\top x$$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって，

$$c^\top x \overset{(2)}{=} (A^\top y)^\top x = (y^\top A)x$$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって，

$$c^\top x \stackrel{(2)}{=} (A^\top y)^\top x = (y^\top A)x = y^\top (Ax)$$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると,

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると,

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって,

$$c^\top x \overset{(2)}{=} (A^\top y)^\top x = (y^\top A)x = y^\top (Ax) \overset{(1),(3)}{\leq} y^\top b$$

注意 (演習問題)

$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \leq 0 \text{ かつ } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \leq 0$$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \leq b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \geq 0$ .... (3)

したがって，

$$c^\top x \overset{(2)}{=} (A^\top y)^\top x = (y^\top A)x = y^\top (Ax) \overset{(1),(3)}{\leq} y^\top b = b^\top y \qquad \square$$

注意 (演習問題)

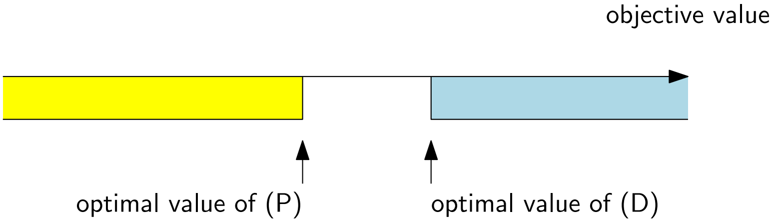
$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \leq 0 \text{ かつ } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \leq 0$$

線形計画問題の弱双対定理：イメージ

弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow c^\top x \le b^\top y$



線形計画問題の弱双対定理：系

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

線形計画問題の弱双対定理：系

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$

$\Rightarrow$

x^* は (P) の最適解
y^* は (D) の最適解

系 (corollary)：定理から直ちに導かれる帰結

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

<u>証明 (前半)</u>：x^* と y^* が仮定を満たすとする

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ $\quad$ y^* は (D) の最適解

証明 (前半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
x^* は (P) の最適解
y^* は (D) の最適解

証明 (前半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^*$

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ $\quad$ y^* は (D) の最適解

<u>証明 (前半)</u>：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^*$

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
x^* は (P) の最適解
y^* は (D) の最適解

証明 (前半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\geq} c^\top x$

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

<u>証明 (前半)</u>：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\geq} c^\top x$
- したがって，x^* は (P) の最適解である

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \geq c^\top x$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
x^* は (P) の最適解
y^* は (D) の最適解

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \leq b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \leq b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
x^* は (P) の最適解
y^* は (D) の最適解

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^*$

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \le b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

<u>証明 (後半)</u>：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^*$

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \leq b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\leq} b^\top y$

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \leq b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

<u>証明 (後半)</u>：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\leq} b^\top y$
- したがって，y^* は (D) の最適解である □

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

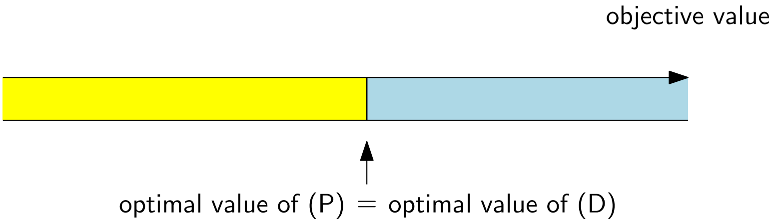
(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \leq b^\top y$$

線形計画問題の弱双対定理：系 — イメージ

弱双対定理の系

$$
\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}
$$



線形計画問題の強双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

線形計画問題の強双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

強双対定理 (証明は省略)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

線形計画問題の強双対定理：補足

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解，$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 のとき

弱双対定理の系

$$c^\top x^* = b^\top y^* \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array}$$

つまり，目的関数値が一致するならば，それらは最適解

強双対定理

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$$

つまり，最適解ならば，目的関数値は一致する

線形計画問題に関する実践

事実

線形計画問題は多項式時間で解くことができる

- 強双対定理を用いている (ことが多い)
- 効率のよい実装が知られ，様々なソフトウェアが開発されている

事実

線形計画問題として多くの問題がモデル化できる

目次

整数計画問題の例

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

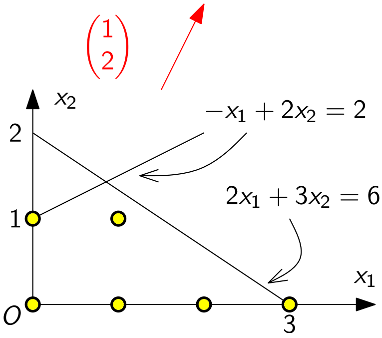
整数計画問題の例：図

図を描いてみる

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



整数計画問題の例：図

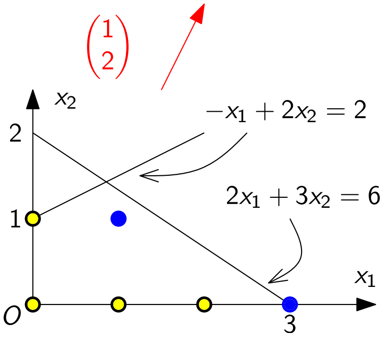
整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\
& -x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 1, x_2 = 1$ は最適解
- 最適値は 3



整数計画問題

整数計画問題 (integer program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{rll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \leq b & \leftarrow \text{成分ごとに「}\leq\text{」} \\ & x \in \mathbb{Z}^n & \leftarrow \text{整数制約} \end{array}$$

先ほどの例：

- $m = 4,\ n = 2$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

整数計画問題に関する実践

事実

整数計画問題を多項式時間で解くアルゴリズムは知られていない

- 実際，NP 困難な問題であると知られている
  (NP 困難性の詳細は，講義『計算理論』を参照)

事実

整数計画問題として多くの問題がモデル化できる

- 線形計画問題よりも多くの問題がモデル化できる
- 多くの組合せ最適化問題もモデル化できる (次回)

目次

整数計画問題の線形計画緩和 (1)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c^\top x \\
\text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\
& x \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

整数計画問題の線形計画緩和 (1)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

整数計画問題の線形計画緩和 (1)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値

$\because$ (P) の許容領域 $\subseteq$ (LP) の許容領域，かつ，目的が最大化

整数計画問題の線形計画緩和 (2)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax \le b
\end{array}
$$

整数計画問題の線形計画緩和 (2)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

整数計画問題の線形計画緩和 (2)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

強双対定理より

(LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値

((LP) と (DLP) に最適解が存在するならば)

整数計画問題の線形計画緩和 (3)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

整数計画問題の線形計画緩和 (3)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

整数計画問題の線形計画緩和 (3)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

観察

(DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

$\because$ (DLP) の許容領域 $\supseteq$ (D) の許容領域，かつ，目的が最小化

整数計画問題の線形計画緩和 (4)：ここまでのまとめ

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

$$(\mathrm{P})\text{ の最適値} \le (\mathrm{LP})\text{ の最適値} = (\mathrm{DLP})\text{ の最適値} \le (\mathrm{D})\text{ の最適値}$$

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

$$(\mathrm{P})\text{ の最適値} = (\mathrm{LP})\text{ の最適値} = (\mathrm{DLP})\text{ の最適値} = (\mathrm{D})\text{ の最適値}$$

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると⋯
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！
  - すなわち，(P) が多項式時間で解ける！

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！
  - すなわち，(P) が多項式時間で解ける！？

最後のステップは慎重な議論が必要 (次回以降)

補足：用語の使い分け

○○問題

個々の問題を指すことば

- 線形計画問題 (linear program)
- 整数計画問題 (integer program)

○○法

その問題を解く方法，その問題によるモデル化法

- 線形計画法 (linear programming)
- 整数計画法 (integer programming)

線形計画緩和 (linear programming relaxation)

目次

この講義のねらい

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

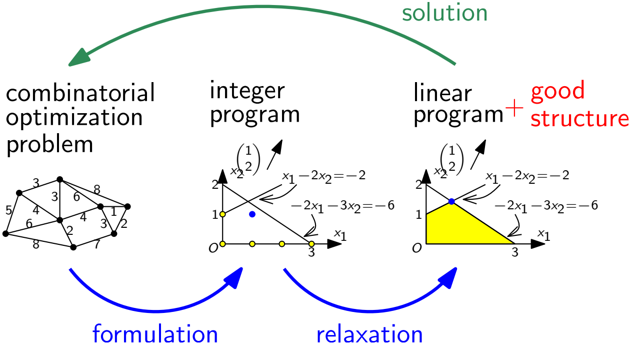
$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 $=$ 線形計画問題の許容領域

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化 (次回)
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和 (今回)
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 (次々回以降)
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 (次々回以降)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次