

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 1 月 9 日

最終更新：2015 年 1 月 9 日 10:44

ここまでのまとめ と ここからの話

目次

- ① ここまでのまとめ と ここからの話
- ② 整数性ギャップ：定義
- ③ 整数性ギャップ：下界  
最大重みマッチング問題  
最小重み頂点被覆問題
- ④ 今日のまとめ

ここまでのまとめ と ここからの話

この講義のねらい

解きやすい問題 多項式時間解法が存在する	解きにくい問題 NP 困難性が証明されている
-------------------------	---------------------------

**疑問**  
どうしてそのような違いが生まれるのか？

→ 解きやすい問題を持つ「共通の性質」は何か？

**部分的な回答**  
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい  
「多面体構造」が「美しい」→ 凸多面体の整数性

ここまでのまとめ と ここからの話

整数計画問題の線形計画緩和

**観察 (再掲)**  
(P) の最適値 ≤ (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 ≤ (D) の最適値

**特に,**  
(P) の最適値 = (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 = (D) の最適値 ⇒  
(P) の最適値 = (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (D) の最適値

つまり、次の 2 つが成り立つ場合が重要

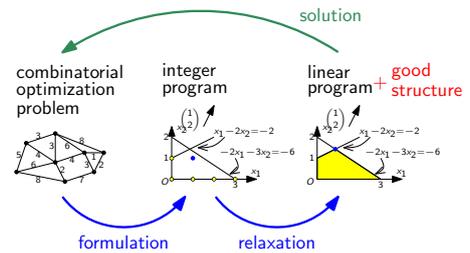
- ▶ (P) の最適値 = (LP) の最適値
- ▶ (DLP) の最適値 = (D) の最適値

今日の目標

- 整数性ギャップについて、次を理解する
- ▶ 整数性ギャップの定義
  - ▶ 整数性ギャップの重要性
  - ▶ 整数性ギャップに対する下界の導出法

ここまでのまとめ と ここからの話

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

ここまでのまとめ と ここからの話

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$  は変数,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  は定数

<b>整数計画問題：(P)</b> maximize $c^T x$ subject to $Ax \leq b,$ $x \in \mathbb{Z}^n$	<b>(DLP) + 整数制約：(D)</b> minimize $b^T y$ subject to $A^T y = c, y \geq 0,$ $y \in \mathbb{Z}^m$
--	--

<b>(P) の線形計画緩和：(LP)</b> maximize $c^T x$ subject to $Ax \leq b$	<b>(LP) の双対問題：(DLP)</b> minimize $b^T y$ subject to $A^T y = c, y \geq 0$
---	---

**観察**  
(P) の最適値 ≤ (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 ≤ (D) の最適値

ここまでのまとめ と ここからの話

この講義のねらい：再考

解きやすい問題 多項式時間解法が存在する	解きにくい問題 NP 困難性が証明されている
-------------------------	---------------------------

**疑問**  
どうしてそのような違いが生まれるのか？

→ 解きやすい問題を持つ「共通の性質」は何か？

**部分的な回答**  
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

**部分的な回答：言い換え**  
解きにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」  
凸多面体に整数性がない

部分的な回答：言い換え

解ぎにくい問題の持つ「多面体構造」は「美しくない」

凸多面体に整数性がない

今回と次回の目標

- ▶ 多面体構造の「美しさ」を定量化する → **整数性ギャップ**
- ▶ 整数性ギャップの解析法を見る

整数計画問題の線形計画緩和：再掲

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$  は変数,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0, \\ & && y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値  $\leq$  (LP) の最適値 = (DLP) の最適値  $\leq$  (D) の最適値

整数性ギャップ：最小化問題

$x \in \mathbb{R}^n$  は変数,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \geq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

整数性ギャップとは？

(P) の **整数性ギャップ** とは次の量

$$\max_{c \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}$$

これは (P) が  
最小化問題であるときの定義

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \geq b \end{aligned}$$

観察

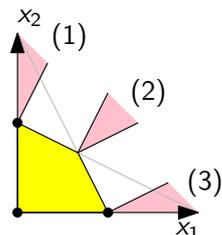
(P) の整数性ギャップ  $\geq 1$

整数性ギャップ：例 (2)

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^2$  は変数,  $c \in \mathbb{R}^2$  は定数



$c \in$  法錐 (1)  $\cup$  法錐 (3) のとき,

$$\frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} = 1$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- ① ここまでのまとめ と ここからの話
- ② 整数性ギャップ：定義
- ③ 整数性ギャップ：下界  
最大重みマッチング問題  
最小重み頂点被覆問題
- ④ 今日のまとめ

整数性ギャップ：最大化問題

$x \in \mathbb{R}^n$  は変数,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

整数性ギャップとは？

(P) の **整数性ギャップ** とは次の量

$$\max_{c \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}}$$

これは (P) が  
最大化問題であるときの定義

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

観察

(P) の整数性ギャップ  $\geq 1$

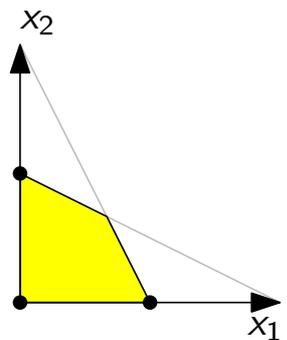
整数性ギャップ (integrality gap) は整数ギャップとも呼ぶ

整数性ギャップ：例 (1)

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^2$  は変数,  $c \in \mathbb{R}^2$  は定数



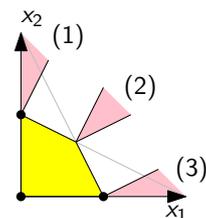
(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

整数性ギャップ：例 (3)

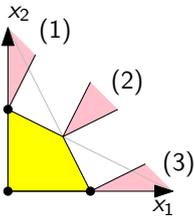
整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$c \in$  法錐 (2) のとき,  
つまり, ある  $0 \leq \lambda \leq 1$  に対して  $c^T = (2 - \lambda, 1 + \lambda)$  のとき,

$$\frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} = \frac{(2 - \lambda) \frac{2}{3} + (1 + \lambda) \frac{2}{3}}{\max\{2 - \lambda, 1 + \lambda\}} = \frac{2}{\max\{2 - \lambda, 1 + \lambda\}}$$



ここで、 $\max\{2 - \lambda, 1 + \lambda\}$  は  $\lambda = \frac{1}{2}$  のとき最小となり、そのとき、

$$\frac{2}{\max\{2 - \lambda, 1 + \lambda\}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

したがって、

$$(P) \text{ の整数性ギャップ} = \frac{4}{3}$$

目次

① ここまでのまとめ と ここからの話

② 整数性ギャップ：定義

③ 整数性ギャップ：下界

- 最大重みマッチング問題
- 最小重み頂点被覆問題

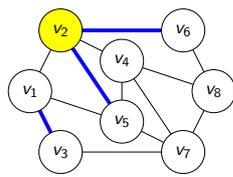
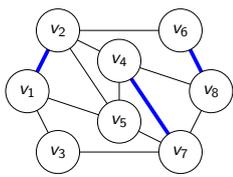
④ 今日のまとめ

グラフにおけるマッチング

無向グラフ  $G = (V, E)$

マッチングとは？

$G$  の **マッチング** とは辺部分集合  $M \subseteq E$  で、 $M$  のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



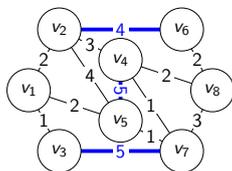
$\{(v_1, v_2), \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$  は マッチングである  $\{(v_1, v_3), \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$  は マッチングではない

マッチングの辺  $e \in M$  は  $e$  の端点を **飽和** する

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- ▶ 入力：無向グラフ  $G = (V, E)$ ，非負重み関数  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ 出力： $G$  のマッチングで、重みが最大のもの



事実

最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる (Edmonds, '65)

効率よく =  $|V|$  と  $|E|$  に関する多項式時間で

整数性ギャップ：重要な性質

命題

(LP) の許容領域が整凸多面体  $\Rightarrow$  (P) の整数性ギャップ = 1

証明：(LP) の許容領域が整凸多面体であると仮定する

- ▶ このとき、任意の  $c \geq 0$  に対して、(P) の最適値 = (LP) の最適値
- ▶ したがって、((P) が最大化問題のときは)

$$(P) \text{ の整数性ギャップ} = \max_{c \geq 0} \frac{(LP) \text{ の最適値}}{(P) \text{ の最適値}} = \max_{c \geq 0} 1 = 1$$

- ▶ (P) が最小化問題であるときも同様

□

整数性ギャップの重要性

この意味で、整数性ギャップは (LP) の許容集合が整凸多面体であることからどれだけ離れているかという量を表している

整数性ギャップの解析

いろいろな組合せ最適化問題の整数計画定式化 (P) とその線形計画緩和 (LP) を考えて、整数性ギャップが何であるか、解析したい

例とする問題

- ▶ 最大重みマッチング問題
- ▶ 最小重み頂点被覆問題
- ▶ 今回は**下界**を証明する
- ▶ 次回は**上界**を証明する

最大重みマッチング

無向グラフ  $G = (V, E)$

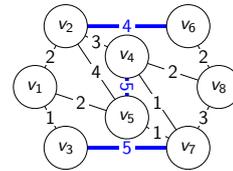
各辺  $e \in E$  に対する非負重み  $w(e) \geq 0$  (辺重み関数  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ )

最大重みマッチングとは？

$w$  に関する  $G$  の**最大重みマッチング**とは

$G$  のマッチング  $M \subseteq E$  で、

$G$  の任意のマッチング  $M'$  に対して  $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$  を満たすもの



最大重みマッチング問題の定式化

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化

$x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$(P) \text{ maximize } \sum_{e \in E} w(e)x_e$$

$$\text{subject to } \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad (\forall v \in V),$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E)$$

記法： $\delta(v) = v$  に接続する辺全体の集合

(P) の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^E$  は変数

$$\begin{aligned} \text{(LP) maximize} \quad & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad (\forall v \in V), \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \quad (\forall e \in E) \end{aligned}$$

このとき、

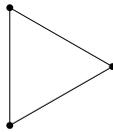
$$\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}}$$

証明：頂点数 3 の閉路を考える

- ▶ すべての辺  $e \in E$  に対して  $w(e) = 1$  のときを考える

- ▶ 次の 2 つを証明する

- 1 (P) の最適値 = 1
- 2 (LP) の最適値  $\geq 3/2$



このとき、

$$\begin{aligned} \text{(P) の整数性ギャップ} &= \max_{w \geq 0} \frac{\text{(LP) の最適値}}{\text{(P) の最適値}} \\ &\geq \frac{w = 1 \text{ のときの (LP) の最適値}}{w = 1 \text{ のときの (P) の最適値}} \\ &\geq \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

示したいこと (2)：(LP) の最適値  $\geq 3/2$

- ▶ (LP) に対する次の許容解  $x$  を考える

$$x_e = 1/2 \quad (\forall e \in E)$$

- ▶ これが本当に許容解であることを確認する
  - ▶ 頂点  $v$  に接続する 2 辺が  $e_1, e_2$  であるとき

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = x_{e_1} + x_{e_2} = 1/2 + 1/2 = 1 \leq 1$$

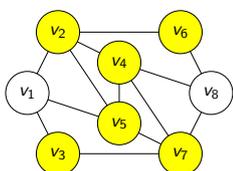
- ▶ この許容解  $x$  の目的関数値 =  $\sum_{e \in E} x_e = 3/2$
- ▶ したがって、(LP) の最適値  $\geq$  許容解  $x$  の目的関数値 =  $3/2$  □



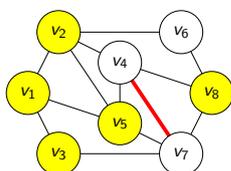
無向グラフ  $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

$G$  の頂点被覆とは頂点部分集合  $C \subseteq V$  で、 $G$  のどの辺もある  $C$  の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  は頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$  は頂点被覆ではない

頂点被覆の頂点は、それに接続する辺を覆う (被覆する)

最大重みマッチング問題の定式化 (P) を考える

命題

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq \frac{3}{2}$$

を満たすようなグラフが存在する

証明の方針

- ▶ そのようなグラフを構成すればよい

示したいこと (1)：(P) の最適値 = 1

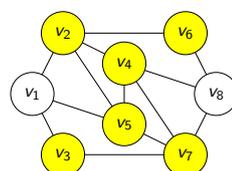
- ▶ すべての辺  $e$  に対して  $w(e) = 1$  なので、(P) の最適値は最大マッチングの要素数に等しい
- ▶ したがって、(P) の最適値 = 1

- 1 ここまでのまとめ と ここからの話
- 2 整数性ギャップ：定義
- 3 整数性ギャップ：下界
  - 最大重みマッチング問題
  - 最小重み頂点被覆問題
- 4 今日のまとめ

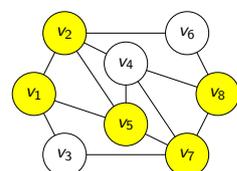
無向グラフ  $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

$G$  の最小頂点被覆とは頂点被覆  $C \subseteq V$  で、 $G$  の任意の頂点被覆  $C'$  に対して  $|C| \leq |C'|$  を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  は最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$  は最小頂点被覆である

最小頂点被覆問題は NP 困難問題

(Karp 1972)

最小重み頂点被覆問題の定式化

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 非負頂点重み関数  $w: V \rightarrow \mathbb{R}$

最小重み頂点被覆問題の定式化

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimize} \quad \sum_{v \in V} w(v)y_v \\ & \text{subject to} \quad \sum_{v \in e} y_v \geq 1 \quad (\forall e \in E), \\ & \quad \quad \quad y_v \in \{0, 1\} \quad (\forall v \in V) \end{aligned}$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)

最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

命題

任意の  $n \geq 2$  に対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq 2 - \frac{2}{n}$$

を満たすような頂点数  $n$  のグラフが存在する

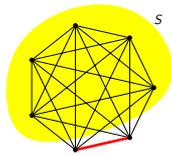
証明の方針

- ▶ そのようなグラフを構成すればよい

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (2)

示したいこと (1)：(P) の最適値  $= n - 1$

- ▶ (P) の目的関数値は必ず整数であり、それは頂点被覆の要素数
- ▶ 要素数が  $n - 2$  以下の頂点部分集合  $S$  を考えると、 $S$  に端点を持たない辺が存在する
- ▶ つまり、 $S$  は頂点被覆ではなく、(P) の最適値  $\geq n - 1$
- ▶ 一方、要素数  $n - 1$  の頂点被覆は存在するので、(P) の最適値  $\leq n - 1$
- ▶ したがって、(P) の最適値  $= n - 1$



最小重み頂点被覆問題の定式化 (P) を考える

いま証明した命題

任意の  $n \geq 1$  に対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \geq 2 - \frac{2}{n}$$

を満たすような頂点数  $n$  のグラフが存在する

次回証明する命題

任意のグラフに対して

$$\text{(P) の整数性ギャップ} \leq 2$$

つまり、完全グラフが最も整数性ギャップの大きい例となっている

- ▶ この意味で、「最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップは 2 に等しい」ということがある

最小重み頂点被覆問題の線形計画緩和

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 非負頂点重み関数  $w: V \rightarrow \mathbb{R}$

(P) の線形計画緩和

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{minimize} \quad \sum_{v \in V} w(v)y_v \\ & \text{subject to} \quad \sum_{v \in e} y_v \geq 1 \quad (\forall e \in E), \\ & \quad \quad \quad 0 \leq y_v \leq 1 \quad (\forall v \in V) \end{aligned}$$

このとき、

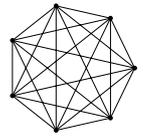
$$\text{(P) の整数性ギャップ} = \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}}$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明

証明：すべての 2 頂点間に辺があるグラフ (完全グラフ) を考える

- ▶ すべての頂点  $v \in V$  に対して  $w(v) = 1$  のときを考える
- ▶ 次の 2 つを証明する

- 1 (P) の最適値  $= n - 1$
- 2 (LP) の最適値  $\leq n/2$



このとき、

$$\begin{aligned} \text{(P) の整数性ギャップ} &= \max_{w \geq 0} \frac{\text{(P) の最適値}}{\text{(LP) の最適値}} \\ &\geq \frac{w = 1 \text{ のときの (P) の最適値}}{w = 1 \text{ のときの (LP) の最適値}} \\ &\geq \frac{n - 1}{n/2} = 2 - \frac{2}{n} \end{aligned}$$

最小重み頂点被覆問題の整数性ギャップ (下界)：証明 (3)

示したいこと (2)：(LP) の最適値  $\leq n/2$

- ▶ (LP) に対する次の許容解  $y$  を考える

$$y_v = 1/2 \quad (\forall v \in V)$$

- ▶ これが本当に許容解であることを確認する
- ▶ 辺  $e \in E$  の端点が  $a, b \in V$  であるとき、

$$\sum_{v \in e} y_v = y_a + y_b = 1/2 + 1/2 = 1 \geq 1$$

- ▶ この許容解  $y$  の目的関数値  $= \sum_{v \in V} y_v = n/2$
- ▶ したがって、(LP) の最適値  $\leq$  許容解  $y$  の目的関数値  $= n/2$  □

目次

- 1 ここまでのまとめ と ここからの話
- 2 整数性ギャップ：定義
- 3 整数性ギャップ：下界  
最大重みマッチング問題  
最小重み頂点被覆問題
- 4 今日のまとめ

## 今日の目標

整数性ギャップについて，次を理解する

- ▶ 整数性ギャップの定義
- ▶ 整数性ギャップの重要性
- ▶ 整数性ギャップに対する下界の導出法