離散最適化基礎論 第 10 回
完全双対整数性：全域木 (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 12 月 19 日

最終更新：2014 年 12 月 24 日　13:20

今日の目標

今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する
- 前回は準備
- 今回，証明

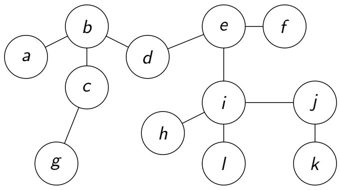
目次

木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと
- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



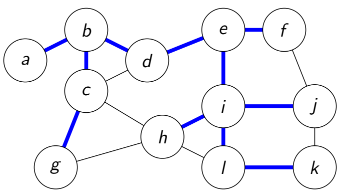
グラフの全域木

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木とは？

G の全域木とは，G の部分グラフで次を満たすもの
- 木である
- 頂点集合が V である

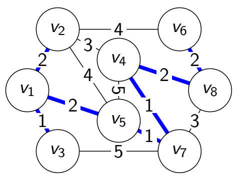
- 全張木，生成木とも呼ぶことがある



G が非連結であるとき，G の全域木は存在しない

最小費用全域木問題

最小費用全域木問題とは？
- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の全域木で，費用が最小のもの



事実

最小費用全域木問題は効率よく解くことができる (Kruskal '56, Prim '57)

効率よく = $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

全域木の性質

木であるための必要十分条件

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 3 つは同値
1. G は閉路を含まない，かつ，G は連結である (つまり，G は木である)
2. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である
3. G は連結である，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

- 定式化 1 は 1 に基づいている
- 定式化 2 は 2 に基づいて行う
- 定式化 3 は 3 に基づいて行う
- 定式化 4 は 2 に基づいて行うが，1 つ観察を用いる

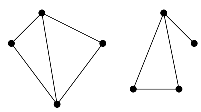
証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

用いる観察

無向グラフ $G = (V, E)$

観察　(証明は演習問題)

$|E| \geq |V| \Rightarrow G$ は閉路を含む



補題

補題

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 2 つは同値

2. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である
4. $|E(S)| \le |S| - 1$ がすべての $S \subseteq V$ $(S \ne \emptyset, V)$ に対して成り立つ，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

ただし，$E(S)$ は S に両端点を持つ G の辺全体の集合

証明：G において，$|E| = |V| - 1$ が成り立つと仮定する
- G が閉路を含むと仮定する (その閉路を C とする)
- C の頂点集合を S とすると，$S \ne \emptyset$
- このとき，$|E(S)| \ge C$ の辺数 $= |S|$
- 一方，$|E(V)| = |E| = |V| - 1 < |V|$ なので，$S \ne V$
- したがって，ある $S \subseteq V$ (ただし，$S \ne \emptyset, V$) に対して，$|E(S)| > |S| - 1$

補題：証明の続き

補題

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 2 つは同値

2. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である
4. $|E(S)| \le |S| - 1$ がすべての $S \subseteq V$ $(S \ne \emptyset, V)$ に対して成り立つ，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

ただし，$E(S)$ は S に両端点を持つ G の辺全体の集合

証明：G において，$|E| = |V| - 1$ が成り立つと仮定する
- G が閉路を含まないと仮定する
- このとき，G の部分グラフも閉路を含まない
- したがって，任意の $S \subseteq V$ $(S \ne \emptyset, V)$ に対して，部分グラフ $G[S] = (S, E(S))$ を考えると，$G[S]$ も閉路を含まない
- $\therefore |E(S)| \le |S| - 1$ □

最小費用全域木問題：定式化 4

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in E(S)} x_e \le |S| - 1 \qquad (\forall\, S \subseteq V, (S \ne \emptyset, V)), \\ & \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\ & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E) \end{aligned}$$

これは正しい定式化

最小費用全域木問題：定式化 4

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in E(S)} x_e \le |S| - 1 \qquad (\forall\, S \subseteq V, (S \ne \emptyset, V)), \\ & \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\ & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E) \end{aligned}$$

ここからの目標

定式化 4 の線形計画緩和が整数性を持つことの証明
- 道具：Kruskal のアルゴリズム

目次

Kruskal のアルゴリズム

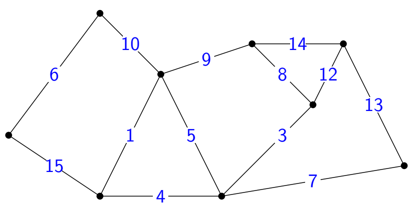
最小費用全域木問題を効率よく解く方法

Kruskal のアルゴリズム

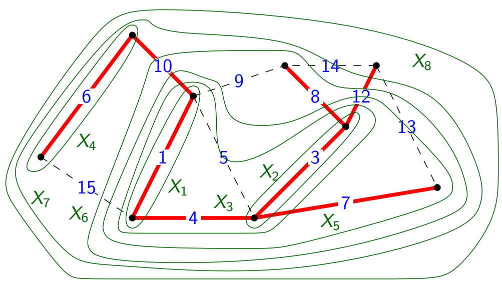
1. G の辺を費用の小さい順に並べる ($c(e_1) \le c(e_2) \le \cdots \le c(e_m)$ であると仮定する)
2. $T := \emptyset$
3. すべての $i := 1, \ldots, m$ に対して，以下を繰り返し
$$T := \begin{cases} T \cup \{e_i\} & (T \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含まないとき}) \\ T & (T \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含むとき}) \end{cases}$$
4. T を出力

これは正しいアルゴリズム (必ず最小費用全域木を出力する)
- 証明は『アルゴリズム論第一』か『アルゴリズム論第二』を参照

Kruskal のアルゴリズム：実行例



Kruskal のアルゴリズム：階層構造 (ラミナ)



目次

最小費用全域木問題：定式化 4

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 4

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \sum_{e\in E} c(e)x_e & \\
& \text{subject to} & \sum_{e\in E(S)} x_e \leq |S|-1 & (\forall\, S\subseteq V, (S\neq\emptyset, V)),\\
& & \sum_{e\in E} x_e = |V|-1, & \\
& & x_e \in \{0,1\} & (\forall\, e\in E)
\end{array}
$$

ここからの目標

定式化 4 の線形計画緩和が整数性を持つことの証明

- 道具：Kruskal のアルゴリズム

最小費用全域木問題：定式化 4 — 線形計画緩和

最小費用全域木問題：定式化 4 の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP)} & \text{minimize} & \sum_{e\in E} c(e)x_e & \\
& \text{subject to} & \sum_{e\in E(S)} x_e \leq |S|-1 & (\forall\, S\subseteq V, (S\neq\emptyset, V)),\\
& & \sum_{e\in E} x_e = |V|-1, & \\
& & 0 \leq x_e \leq 1 & (\forall\, e\in E)
\end{array}
$$

最小費用全域木問題：定式化 4 — 線形計画緩和の双対問題

最小費用全域木問題：定式化 4 の線形計画緩和の双対問題

$y \in \mathbb{R}^{2^V-\{\emptyset,V\}}$，$z\in\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(DLP)} & \text{maximize} & -\sum_{S\in 2^V-\{\emptyset,V\}} (|S|-1)y_s-(|V|-1)z-\sum_{e\in E} w_e & \\
& \text{subject to} & -\sum_{S: e\subseteq S\subsetneq V} y_S - z - w_e \leq c(e) & (\forall\, e\in E),\\
& & y_S \geq 0 & (\forall\, S\in 2^V-\{\emptyset,V\}),\\
& & w_e \geq 0 & (\forall\, e\in E)
\end{array}
$$

復習：2^V は V の冪集合 (べき集合) で，V の部分集合全体の集合のこと

最小費用全域木問題：定式化 4 — 完全双対整数性の証明の方針

行列 $A\in\mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b\in\mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\leq b\}$

完全双対整数性とは？ (再確認)

不等式系 $Ax\leq b$ が完全双対整数性 (total dual integrality) を持つ，
(あるいは，TDI (totally dual integral) である) とは，
任意の $c\in\mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題が整数最適解を持つこと

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DLP)} & \text{minimize} & b^\top y\\
& \text{subject to} & A^\top y = c, y\geq 0
\end{array}
$$

証明の方針：実際に，(DLP) の整数最適解を構成する

1. (LP) の許容解を，Kruskal のアルゴリズムによって構成する
2. (DLP) の整数許容解を，Kruskal のアルゴリズムから構成する
3. その 2 つの目的関数値が一致することを確認する
4. 弱双対定理から，これらは最適解である

完全双対整数性の証明：(LP) の許容解

Kruskal のアルゴリズムを実行

- 選ばれた $|V|-1$ 個の辺を，選ばれた順に $f_1,\ldots,f_{|V|-1}$ とする
  - つまり，$c(f_1)\leq\cdots\leq c(f_{|V|-1})$
- このとき，$x^*\in\mathbb{R}^E$ を次で定義

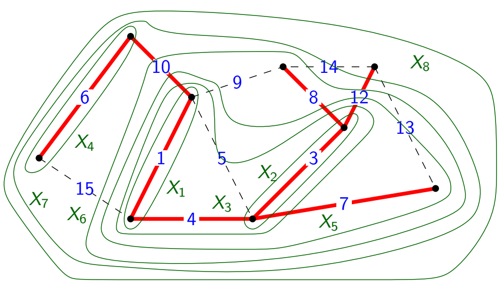
$$
x^*_e = \begin{cases} 0 & (e\notin\{f_1,\ldots,f_{|V|-1}\}),\\ 1 & (e\in\{f_1,\ldots,f_{|V|-1}\})\end{cases}
$$

- この x^* は (P) の許容解
  ($\because$ Kruskal のアルゴリズムは全域木を出力する)
- 「(P) の許容集合 $\subseteq$ (LP) の許容集合」なので，x^* は (LP) の許容解

完全双対整数性の証明：(DLP) の許容解 — 準備

Kruskal のアルゴリズムを実行

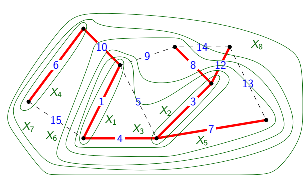
- 選ばれた $|V|-1$ 個の辺を，選ばれた順に $f_1,\ldots,f_{|V|-1}$ とする
  - つまり，$c(f_1)\leq\cdots\leq c(f_{|V|-1})$
- X_k：$(V,\{f_1,\ldots,f_k\})$ の連結成分で f_k を含むものの頂点集合



完全双対整数性の証明：(DLP) の許容解

$y^*\in\mathbb{R}^{2^V-\{\emptyset,V\}}$，$z^*\in\mathbb{R}$, $w^*\in\mathbb{R}^E$ を次で定義

$$
\begin{aligned}
y^*_S &= \begin{cases} c(f_{\ell(k)})-c(f_k) & (\text{ある } k \text{ に対して，} S=X_k \text{ のとき}),\\ & \text{ただし，} \ell(k)=\min\{i>k \mid f_i\in\delta(X_k)\}\\ 0 & (\text{それ以外のとき}),\end{cases}\\
z^* &= -c(f_{|V|-1})\\
w^*_e &= 0 \quad (\forall\, e\in E)
\end{aligned}
$$

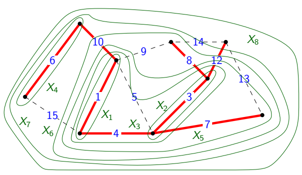


注：$c(e)$ がすべての $e\in E$ に対して整数 $\Rightarrow$ y^*, z^*, w^* も整数 (ベクトル)

完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (1)

$y_S^* \geq 0$ が成り立つのはなぜか？

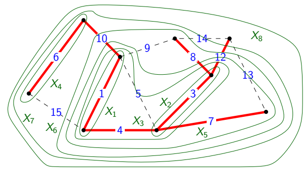
- ある k に対して，$S = X_k$ である場合のみ考える
- このとき，$y_S^* = c(f_{\ell(k)}) - c(f_k)$ で，$\ell(k) = \min\{i > k \mid f_i \in \delta(X_k)\}$
- つまり，$\ell(k) > k$ なので，
  Kruskal のアルゴリズムにおいて，$f_{\ell(k)}$ は f_k よりも後に追加された
- $\therefore c(f_{\ell(k)}) \geq c(f_k)$
- $\therefore y_S^* = c(f_{\ell(k)}) - c(f_k) \geq 0$



完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2)

もう 1 つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- $X_1, \ldots, X_{|V|-2}$ のどれが $e \in E$ を含むか考える
- e を含むものは「包含関係の鎖」を作る
  つまり，ある $k_1 < k_2 < \cdots < k_i$ が存在して，
  $e \subseteq X_{k_1} \subseteq X_{k_2} \subseteq \cdots \subseteq X_{k_i}$ となり，
  任意の $k \notin \{k_1, \ldots, k_i\}$ に対して，$e \not\subseteq X_k$



費用 9 の辺を e とすると，$e \subseteq X_6 \subseteq X_7 \subseteq X_8$

完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう 1 つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- このとき，

$$\begin{aligned} y^*_{X_{k_1}} &= c(f_{k_2}) - c(f_{k_1}) \\ y^*_{X_{k_2}} &= c(f_{k_3}) - c(f_{k_2}) \\ &\vdots \\ y^*_{X_{k_i}} &= c(f_{|V|-1}) - c(f_i) \end{aligned}$$

- つまり，$\displaystyle\sum_{S: e \subseteq S \subsetneq V} y_S^* = \sum_{j=1}^{i} y^*_{X_{k_j}} = c(f_{|V|-1}) - c(f_{k_1})$

完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう 1 つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- つまり，

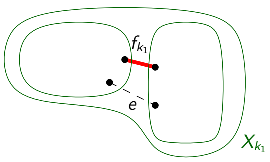
$$-\sum_{S: e \subseteq S \subsetneq V} y_S^* - z^* - w_e^* = -c(f_{|V|-1}) + c(f_{k_1}) + c(f_{|V|-1}) - 0 = c(f_{k_1})$$

- ここで，$c(f_{k_1}) \leq c(e)$ であることを導く
- $f_{k_1} = e$ ならば $c(f_{k_1}) = c(e)$
- よって，$f_{k_1} \neq e$ と仮定する

完全双対整数性の証明：(DLP) に対する許容性 (2) 続き

もう 1 つの不等式制約が成り立つのはなぜか？

- まず，$e \subseteq X_{k_1}$ であり，$f_{k_1} \subseteq X_{k_1}$ である
- Kruskal のアルゴリズムの動作から，部分グラフ $(V, \{f_1, \ldots, f_{k_1 - 1}\})$
  において，f_{k_1} の両端点は異なる連結成分に含まれる
- X_{k_1} は e を含む最小の X_k だから，e の両端点もその部分グラフの
  異なる連結成分に含まれなければならない
- つまり，X_{k-1} に e を追加しても X_k が得られていた
- しかし，Kruskal のアルゴリズムは f_{k_1} を選び，e を選ばなかった
- Kruskal のアルゴリズムの動作から，$c(f_{k_1}) \leq c(e)$ となる



最小費用全域木問題：定式化 4 — 完全双対整数性の証明の方針 (確認)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

完全双対整数性とは？ (再確認)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性 (total dual integrality) を持つ，
(あるいは，TDI (totally dual integral) である) とは，
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題が整数最適解を持つこと

$$\text{(DLP)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

証明の方針：実際に，(DLP) の整数最適解を構成する

1. (LP) の許容解を，Kruskal のアルゴリズムによって構成する
2. (DLP) の整数許容解を，Kruskal のアルゴリズムから構成する
3. その 2 つの目的関数値が一致することを確認する
4. 弱双対定理から，これらは最適解である

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (1)

まず，次を証明する

補題

任意の $k \in \{1, \ldots, |V| - 2\}$ に対して

$$-\sum_{S \subseteq X_k} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_k) \cap F} c(e) - (|X_k| - 1) \cdot c(f_{\ell(k)})$$

ただし，$F = \{f_1, \ldots, f_{|V|-1}\}$

証明：k に関する帰納法

- $k = 1$ のときを考える
- $|X_1| = 2$ なので，$|X_1| - 1 = 1$
- 左辺 $= -(c(f_{\ell(1)}) - c(f_1)) = c(f_1) - c(f_{\ell(1)})$
- 右辺 $= c(f_1) - c(f_{\ell(1)})$
- したがって，左辺 $=$ 右辺

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (2)

証明 (続き)：任意の $k \geq 1$ を考える

- 任意の $k' \leq k$ に対して次が正しいと仮定する

$$-\sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}| - 1) \cdot c(f_{\ell(k')})$$

- このとき，次を証明する

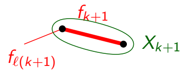
$$-\sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S| - 1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}| - 1) \cdot c(f_{\ell(k+1)})$$

- 場合分け
  1. f_{k+1} の両端点が $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点であるとき
  2. f_{k+1} の一方の端点のみが $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点であるとき
  3. f_{k+1} のどちらの端点も $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点でないとき

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (3)

1 f_{k+1} の両端点が $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点であるとき

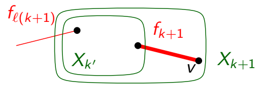
- つまり，$|X_{k+1}| = 2$
- 左辺 $= -(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) = c(f_{k+1}) - c(f_{\ell(k+1)})$
- 右辺 $= c(f_{k+1}) - c(f_{\ell(k+1)})$
- したがって，左辺 = 右辺



完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (4)

2 f_{k+1} の一方の端点のみが $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点であるとき

- つまり，ある頂点 $v \in V$ と添え字 $k' \leq k$ が存在して，$X_{k+1} = X_{k'} \cup \{v\}$，かつ，$f_{k+1} = f_{\ell(k')}$
- また，このとき，$E(X_{k+1}) \cap F = (E(X_{k'}) \cap F) \cup \{f_{k+1}\}$



完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (5)

2 f_{k+1} の一方の端点のみが $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点であるとき

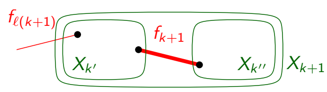
- したがって，証明したいことの左辺

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S|-1) y^*_S \\
&= -\sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S|-1) y^*_S - (|X_{k+1}|-1) y^*_{X_{k+1}} \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}|-1) c(f_{\ell(k')}) - (|X_{k+1}|-1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}|-2) c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}|-1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k+1}|-1) c(f_{\ell(k+1)}) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}|-1) c(f_{\ell(k+1)})
\end{aligned}
$$

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (6)

3 f_{k+1} のどちらの端点も $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点でないとき

- つまり，ある 2 つの添え字 $k', k'' \leq k$ が存在して，$X_{k+1} = X_{k'} \cup X_{k''}$，$X_{k'} \cap X_{k''} = \emptyset$，かつ，$f_{k+1} = f_{\ell(k')} = f_{\ell(k'')}$
- また，このとき，$E(X_{k+1}) \cap F = (E(X_{k'}) \cap F) \cup (E(X_{k''}) \cap F) \cup \{f_{k+1}\}$



完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (7)

3 f_{k+1} のどちらの端点も $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点でないとき

- したがって，証明したいことの左辺

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{S \subseteq X_{k+1}} (|S|-1) y^*_S \\
&= -\sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S|-1) y^*_S - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S|-1) y^*_S - (|X_{k+1}|-1) y^*_{X_{k+1}} \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}|-1) c(f_{\ell(k')}) + \\
&\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}|-1) c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}|-1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1}))
\end{aligned}
$$

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題 (8)

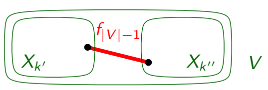
3 f_{k+1} のどちらの端点も $(V, \{f_1, \ldots, f_k\})$ の孤立点でないとき

- したがって，証明したいことの左辺

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}|-1) c(f_{\ell(k')}) + \\
&\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}|-1) c(f_{\ell(k'')}) - (|X_{k+1}|-1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) \\
&\quad -(|X_{k'}|-1) c(f_{k+1}) - (|X_{k''}|-1) c(f_{k+1}) \\
&\quad -(|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1)(c(f_{\ell(k+1)}) - c(f_{k+1})) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{k+1}) - (|X_{k'}| + |X_{k''}| - 1) c(f_{\ell(k+1)}) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k+1}) \cap F} c(e) - (|X_{k+1}|-1) c(f_{\ell(k+1)})
\end{aligned}
$$

完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (1)

- $f_{|V|-1}$ が $X_{k'}$ と $X_{k''}$ を結ぶとする
- つまり，$V = X_{k'} \cup X_{k''}$，$X_{k'} \cap X_{k''} = \emptyset$，$f_{\ell(k')} = f_{\ell(k'')} = f_{|V|-1}$，$(E(X_{k'}) \cap F) \cup (E(X_{k''}) \cap F) \cup \{f_{|V|-1}\} = F$



完全双対整数性の証明：目的関数値の一致 — 補題の利用 (2)

- このとき，(DLP) における許容解 (y^*, z^*, w^*) の目的関数値は

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S|-1) y^*_S - (|V|-1) z^* - \sum_{e \in E} w^*_e \\
&= -\sum_{S \subseteq X_{k'}} (|S|-1) y^*_S - \sum_{S \subseteq X_{k''}} (|S|-1) y^*_S + (|V|-1) c(f_{|V|-1}) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) - (|X_{k'}|-1) c(f_{\ell(k')}) + \\
&\quad \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) - (|X_{k''}|-1) c(f_{\ell(k'')}) + (|V|-1) c(f_{|V|-1}) \\
&= \sum_{e \in E(X_{k'}) \cap F} c(e) + \sum_{e \in E(X_{k''}) \cap F} c(e) + c(f_{|V|-1}) = \sum_{e \in F} c(e)
\end{aligned}
$$

- これは (LP) における許容解 x^* の目的関数値

結論

分かったこと

定式化 4 (の線形計画緩和) の不等式系は完全双対整数性を持つ

つまり，線形計画緩和の許容領域は凸多面体

もう 1 つ分かること

Kruskal のアルゴリズムは正しく最小費用全域木を出力する

つまり，Kruskal のアルゴリズムの正しさを証明するために
線形計画法と凸多面体を利用した

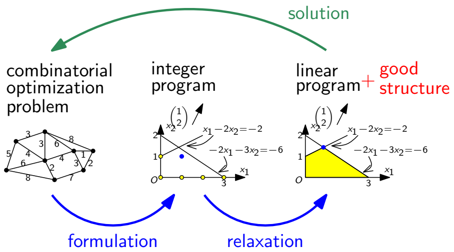
目次

今日の目標

今日の目標

最小費用全域木問題の持つ完全双対整数性を理解する
- 前回は準備
- 今回，証明

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ