離散最適化基礎論 第 8 回
完全双対整数性：ネットワークフロー

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 12 月 5 日

最終更新：2014 年 12 月 9 日　08:36

今日の目標

今日の目標

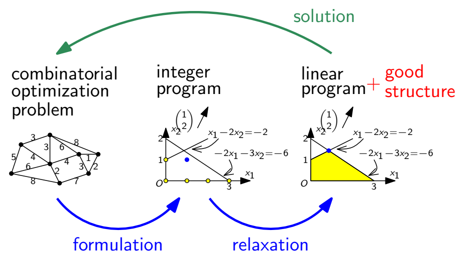
今までの講義内容を用いて以下の問題に取り組む
- 二部グラフにおける最大マッチング問題
  - Kőnig–Egerváry の定理
- 最大流問題
  - 整数流定理
  - 最大流最小カット定理

これらの定理は組合せ最適化における基本的な定理であり，
この講義では線形計画法の立場から証明を行う

目次

1. 前回までの復習
2. 二部グラフにおける最大マッチング問題
3. 最大流問題
4. 今日のまとめ

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題	解きにくい問題
多項式時間解法が存在する	NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」$\rightsquigarrow$ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

特に，

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

つまり，次の 2 つが成り立つ場合が重要
- (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

凸多面体および不等式系の整数性

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$

凸多面体の整数性

P が整凸多面体 (P のすべての頂点座標が整数) $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，
(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値であり，(LP) は整数最適解を持つ

不等式系の双対整数性

不等式系 $Ax \le b$ が完全双対整数性を持つ $\Leftrightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，
(D) の最適値 $=$ (DLP) の最適値であり，(DLP) は整数最適解を持つ

凸多面体および不等式系の整数性 (2)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$，凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

完全双対整数性の優位性

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow$ P は整凸多面体

つまり，

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，
(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値であり，(LP) は整数最適解を持ち，
(D) の最適値 $=$ (DLP) の最適値であり，(DLP) は整数最適解を持つ

凸多面体および不等式系の整数性 (2)

完全双対整数性を持つのはいつか？

完全ユニモジュラ行列とは？

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ (totally unimodular) であるとは，
A の任意の正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであること

完全ユニモジュラ行列と完全双対整数性

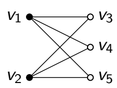
A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$ 任意のベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ に対して
不等式系 $Ax \leq b$ は完全双対整数性を持つ

つまり，A が完全ユニモジュラである場合はとても重要

行列 A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$
任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ と $b \in \mathbb{Z}^m$ に対して，
(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値であり，(LP) は整数最適解を持ち，
(D) の最適値 $=$ (DLP) の最適値であり，(DLP) は整数最適解を持つ

完全ユニモジュラ行列の例

- 二部グラフの接続行列



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 各成分が $0, 1, -1$ であり，
  各列に 1 がちょうど 1 つ，-1 がちょうど 1 つある行列
  (演習問題 7.10)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

完全ユニモジュラ性を保つ操作

完全ユニモジュラ性を保つ操作

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ $\Rightarrow$
(1) $A^\top \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ も完全ユニモジュラ
(2) $-A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ も完全ユニモジュラ
(3) $[A\ I] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ も完全ユニモジュラ
(4) $[A\ -A] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+n)}$ も完全ユニモジュラ

目次

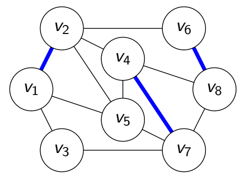
1 前回までの復習
2 二部グラフにおける最大マッチング問題
3 最大流問題
4 今日のまとめ

グラフにおけるマッチング

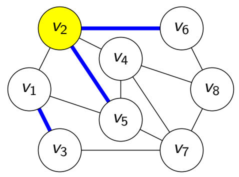
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

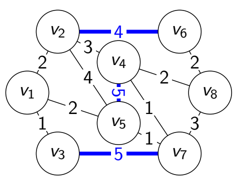
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

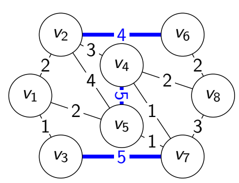
w に関する G の最大重みマッチングとは
G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの



事実

最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる (Edmonds, '65)

効率よく $=$ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

最大マッチング問題：定式化 1

重みがすべて 1 のとき，最大マッチング問題という

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 1

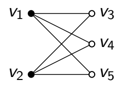
$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} x_e \\
& \text{subject to} & x_e + x_f \leq 1 \qquad (\forall\, e, f : \text{同じ頂点に接続する辺}), \\
& & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

これは正しい定式化

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
& \text{subject to} & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_b + x_c \leq 1, \\
& & x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, x_e + x_f \leq 1, \\
& & x_a + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \{0, 1\}
\end{array}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

最大マッチング問題：定式化 2

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} x_e \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\
& & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

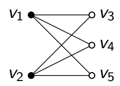
これも正しい定式化

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる
$\leadsto$ 「よい定式化」と「悪い定式化」がある

最大マッチング問題：定式化 2 — 二部グラフにおける例

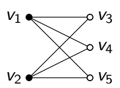
$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)} & \text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
& \text{subject to} & x_a + x_b + x_c \leq 1, x_d + x_e + x_f \leq 1, \\
& & x_a + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \{0, 1\}
\end{array}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (再掲)

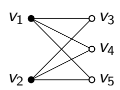
$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
& \text{subject to} & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_b + x_c \leq 1, \\
& & x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, x_e + x_f \leq 1, \\
& & x_a + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \{0, 1\}
\end{array}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (書き換え)

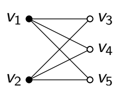
$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
& \text{subject to} & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_b + x_c \leq 1, \\
& & x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, x_e + x_f \leq 1, \\
& & x_a + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \geq 0, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP1)} & \text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
& \text{subject to} & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_b + x_c \leq 1, \\
& & x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, x_e + x_f \leq 1, \\
& & x_a + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \geq 0, \\
& & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \leq 1
\end{array}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP1)} & \text{maximize} & (1,1,1,1,1,1) \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix} \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

次の $x \in \mathbb{R}^E$ は (LP1) の許容解

$$
\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

目的関数値は 3

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\text{(LP1)} \quad \text{maximize} \quad (1,1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix}
$$

$$
\text{subject to} \quad \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix} \le
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

すなわち，
(LP1) の最適値
- ≥ 3
- > 2
- $=$ (P1) の最適値
- $\therefore$ これはよくない定式化

最大マッチング問題：定式化 1 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\text{(LP1)} \quad \text{maximize} \quad (1,1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix}
$$

$$
\text{subject to} \quad \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix} \le
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

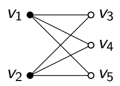
係数行列の左上 3×3 は

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

で，行列式 $= -2$ なので，
係数行列は
完全ユニモジュラではない

最大マッチング問題：定式化 2 — 二部グラフにおける例 (再掲)

$$
\begin{aligned}
\text{(P2)} \quad \text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b + x_c \le 1, x_d + x_e + x_f \le 1, \\
& x_a + x_d \le 1, x_b + x_e \le 1, x_c + x_f \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$



ただし，
$a = \{v_1, v_3\}$, $b = \{v_1, v_4\}$, $c = \{v_1, v_5\}$,
$d = \{v_2, v_3\}$, $e = \{v_2, v_4\}$, $f = \{v_2, v_5\}$

すべての辺の重みは 1 とする

最大マッチング問題：定式化 2 — 二部グラフにおける例 (書き換え)

$$
\begin{aligned}
\text{(P2)} \quad \text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b + x_c \le 1, x_d + x_e + x_f \le 1, \\
& x_a + x_d \le 1, x_b + x_e \le 1, x_c + x_f \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \ge 0, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

最大マッチング問題：定式化 2 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\begin{aligned}
\text{(LP2)} \quad \text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b + x_c \le 1, x_d + x_e + x_f \le 1, \\
& x_a + x_d \le 1, x_b + x_e \le 1, x_c + x_f \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \ge 0, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f \le 1
\end{aligned}
$$

最大マッチング問題：定式化 2 — 二部グラフにおける例 (線形計画緩和)

$$
\text{(LP2)} \quad \text{maximize} \quad (1,1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix}
$$

$$
\text{subject to} \quad \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \\ x_f \end{pmatrix} \le
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

- 実をいうと，
  この係数行列は
  完全ユニモジュラ
- したがって，これは
  よい定式化

最大マッチング問題：定式化 2

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{(P2)} \quad \text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

最大マッチング問題：定式化 2 (書き換え)

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2 (書き換え)

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{(P2)} \quad \text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\
& x_e \ge 0 \qquad (\forall\, e \in E), \\
& x_e \le 1 \qquad (\forall\, e \in E), \qquad (\leftarrow \text{この不等式は全部冗長}) \\
& x_e \in \mathbb{Z} \qquad (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

最大マッチング問題：定式化 2 (書き換え)

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2 (書き換え)

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P2)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} x_e & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 & (\forall\, v \in V), \\
& & x_e \geq 0 & (\forall\, e \in E), \\
& & x_e \in \mathbb{Z} & (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

最大マッチング問題：定式化 2 (書き換え)

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2 (書き換え)

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P2)} & \text{maximize} & 1^\top x & \leftarrow 1 \in \mathbb{R}^E \\
& \text{subject to} & Bx \leq 1, & \leftarrow 1 \in \mathbb{R}^V \\
& & -x \leq 0, & \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^E \\
& & x \in \mathbb{Z}^E &
\end{array}
$$

B はグラフ G の接続行列

最大マッチング問題：定式化 2 (線形計画緩和)

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2 (線形計画緩和)

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP2)} & \text{maximize} & 1^\top x & \leftarrow 1 \in \mathbb{R}^E \\
& \text{subject to} & Bx \leq 1, & \leftarrow 1 \in \mathbb{R}^V \\
& & -x \leq 0, & \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^E
\end{array}
$$

最大マッチング問題：定式化 2 (線形計画緩和)

最大マッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2 (線形計画緩和)

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP2)} & \text{maximize} & 1^\top x \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix} B \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- G が二部グラフのとき，B は完全ユニモジュラなので，係数行列 $\begin{pmatrix} B \\ -I \end{pmatrix}$ は完全ユニモジュラ
- $\therefore$ (LP2) は整数最適解を持ち，(P2) の最適値 $=$ (LP2) の最適値

二部グラフにおける最大マッチング問題：全体像

整数計画問題：(P2)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 1^\top x \\
\text{subject to} & Bx \leq 1, \\
& x \geq 0, \\
& x \in \mathbb{Z}^E
\end{array}
$$

(DLP2) + 整数制約：(D2)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & B^\top y \geq 1, \\
& y \geq 0, \\
& y \in \mathbb{Z}^V
\end{array}
$$

(P2) の線形計画緩和：(LP2)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 1^\top x \\
\text{subject to} & Bx \leq 1, \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

(LP2) の双対問題：(DLP2)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & B^\top y \geq 1, \\
& y \geq 0
\end{array}
$$

係数行列の完全ユニモジュラ性から，
(DLP2) も整数最適化を持ち，(D2) の最適値 $=$ (DLP2) の最適値

問題 (D2) の解釈 (1)

(DLP2) + 整数制約：(D2)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & B^\top y \geq 1, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^V
\end{array}
$$

(D2) の整数制約を 01 制約に変えたもの：(D2')

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & B^\top y \geq 1, y \geq 0, y \in \{0,1\}^V
\end{array}
$$

演習問題：(D2') の最適解は (D2) の最適解
(つまり，(D2) の最適値 $=$ (D2') の最適値)

問題 (D2) の解釈 (1)

(D2) の整数制約を 01 制約に変えたもの：(D2')

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & B^\top y \geq 1, y \geq 0, y \in \{0,1\}^V
\end{array}
$$

(D2') を書き直したもの

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{v \in V} y_v & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in e} y_v \geq 1 & (\forall\, e \in E), \\
& y \geq 0, y \in \{0,1\}^V &
\end{array}
$$

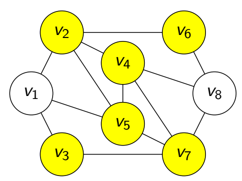
これは最小頂点被覆問題を 01 整数計画問題として定式化したもの

頂点被覆

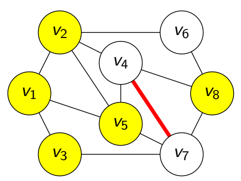
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

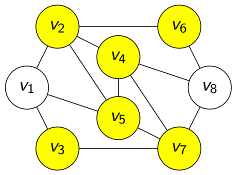
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

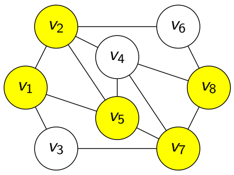
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \le |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

最小頂点被覆問題の定式化

無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \le |C'|$ を満たすもの

(D2') を書き直したもの

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \sum_{v \in V} y_v & \\ \text{subject to} & \sum_{v \in e} y_v \ge 1 & (\forall\, e \in E), \\ & y \ge 0, y \in \{0,1\}^V & \end{array}$$

ここまでのまとめ — Kőnig–Egerváry の定理

- (P2)：最大マッチング問題を 01 整数計画問題として定式化したもの
- (D2)：最小頂点被覆問題を 01 整数計画問題として定式化したもの

二部グラフに対しては，係数行列が完全ユニモジュラなので，

- (P2) の最適値 = (D2) の最適値

すなわち，次の定理が得られる

Kőnig–Egerváry の定理

二部グラフに対して

- 最大マッチングの要素数 = 最小頂点被覆の要素数

グラフ理論，離散最適化における重要な定理

目次

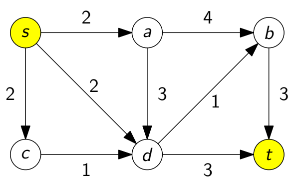
1. 前回までの復習
2. 二部グラフにおける最大マッチング問題
3. 最大流問題
4. 今日のまとめ

最大流問題とは？

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$
(弧の容量は非負実数)

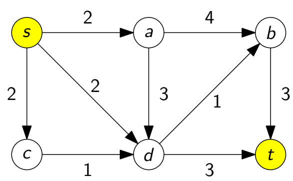


最大流問題とは？

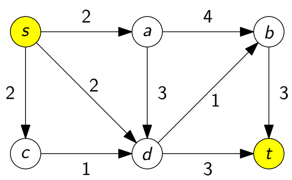
最大流問題とは？

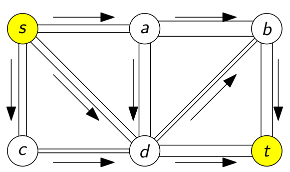
出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの
(s から t へ至る最大流)

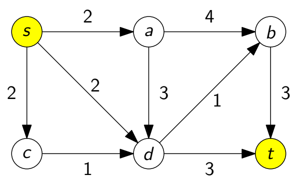


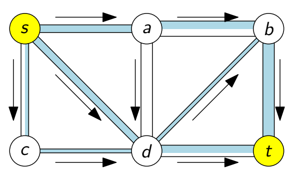
流れとは？: 直感 (1)



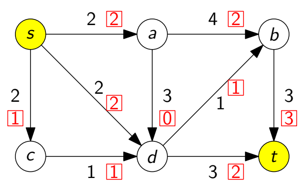


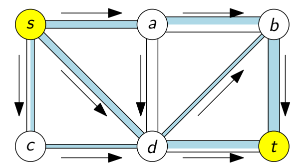
流れとは？: 直感 (2)





流れとは?: 直感 (3)





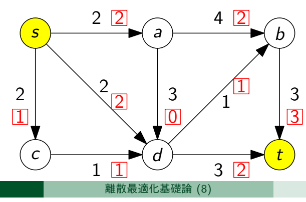
流れとは? (1)

s から t へ至る流れとは?

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, (流量保存制約)

$$\underbrace{\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))}_{(v\text{ へ流入する総量})} = \underbrace{\sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))}_{(v\text{ から流出する総量})}$$



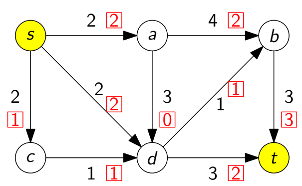
流れとは? (2)

s から t へ至る流れとは?

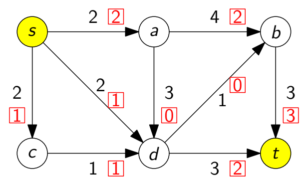
各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において, (容量制約)

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

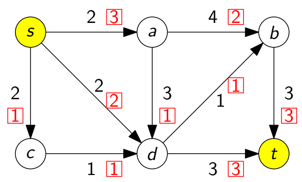


これは流れか? (1)



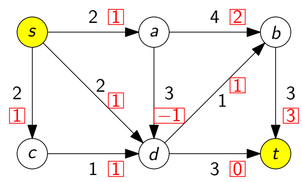
流れではない

これは流れか? (2)



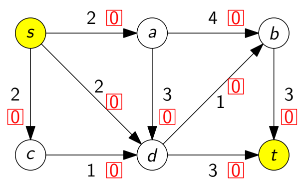
流れではない

これは流れか? (3)



流れではない

これは流れか? (4)



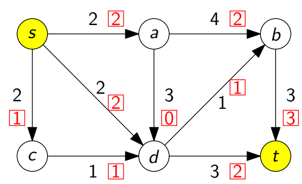
流れである

流れの値

流れ f の値とは?

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し, $\mathtt{val}(f)$ と表記する

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

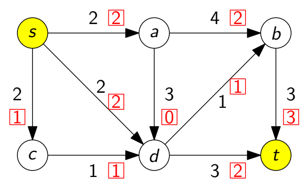


この流れの値は 5

最大流

最大流とは？

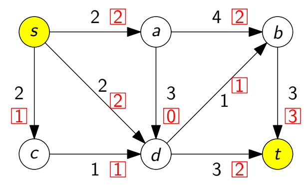
s から t へ至る流れ f が最大流であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \le \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと



はじめの目標

最大流とは？

s から t へ至る流れ f が最大流であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \le \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと



はじめの目標

最大流問題を線形計画問題として定式化する

最適化モデル作成のポイント (復習)

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 01 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

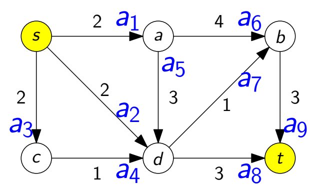
最大流問題：変数

決定すべきこと：どの弧にどれだけ流すか (量)

- 各弧 $a_i \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$ に対して

$$x_i \in \mathbb{R}$$

という変数を設定する
- 解釈：弧 a_i の上を流れる量が x_i である
- 変数の数 $= 9$ (弧の数)



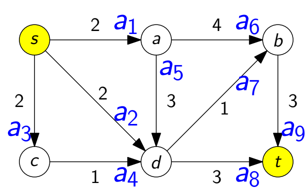
最大流問題：目的関数

最適化するもの：流量

- 目的は

$$\text{最大化} \quad x_1 + x_2 + x_3$$

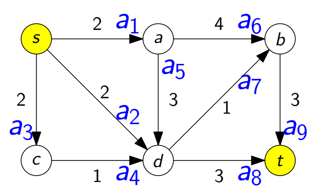
- 解釈：流量



最大流問題：制約 (1)

制約 (1)：容量制約

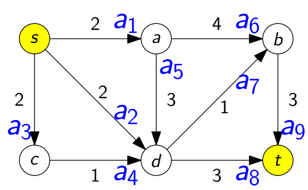
- $0 \le x_1 \le 2$
- $0 \le x_2 \le 2$
- $0 \le x_3 \le 2$
- $0 \le x_4 \le 1$
- $0 \le x_5 \le 3$
- $0 \le x_6 \le 4$
- $0 \le x_7 \le 1$
- $0 \le x_8 \le 3$
- $0 \le x_9 \le 3$



最大流問題：制約 (2)

制約 (2)：流量保存制約

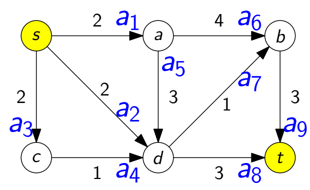
- $x_1 = x_5 + x_6$ (頂点 a に関して)
- $x_6 + x_7 = x_9$ (頂点 b に関して)
- $x_3 = x_4$ (頂点 c に関して)
- $x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8$ (頂点 d に関して)



最大流問題：線形計画法としての定式化

最大流問題に対する線形計画問題としての定式化

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{subject to} & x_1 = x_5 + x_6, x_6 + x_7 = x_9, \\
 & x_3 = x_4, x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8, \\
 & 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 3, \\
 & 0 \le x_6 \le 4, 0 \le x_7 \le 1, 0 \le x_8 \le 3, 0 \le x_9 \le 3
\end{array}$$

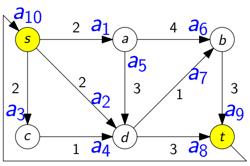


最大流問題：線形計画法としての定式化

t から s へ至る弧を付け加えて，その上の流量を最大化する，と考えた方が後の都合がよいので，そうしてみる

最大流問題に対する線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_{10} \\
\text{subject to} & x_1 = x_5 + x_6, x_6 + x_7 = x_9, \\
& x_3 = x_4, x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8, \\
& x_{10} = x_1 + x_2 + x_3, x_8 + x_9 = x_{10}, \\
& 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 3, \\
& 0 \le x_6 \le 4, 0 \le x_7 \le 1, 0 \le x_8 \le 3, 0 \le x_9 \le 3, 0 \le x_{10}
\end{array}
$$



最大流問題：線形計画法としての定式化 — 書き換え

$$
\text{maximize} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}
$$

$$
\text{subject to} \quad \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

最大流問題：線形計画法としての定式化 (一般的に)

$x \in \mathbb{R}^A$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_{(t,s)} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in A} x_{(u,v)} - \sum_{u\colon (v,u)\in A} x_{(v,u)} = 0 \quad (\forall\, v \in V), \\
& 0 \le x_a \le c(a) \quad (\forall\, a \in A)
\end{array}
$$

ただし，$c((t,s)) = +\infty$ (または十分大きな整数) とする

最大流問題：線形計画法としての定式化 (一般的に)

$x \in \mathbb{R}^A$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & (0,\dots,0,1)x \\
\text{subject to} & Ax = 0, \\
& -x \le 0, \\
& x \le c
\end{array}
$$

A は各成分が $0, 1, -1$ であり，
各列に 1 がちょうど 1 つ，-1 がちょうど 1 つある行列
すなわち，完全ユニモジュラ

最大流問題：線形計画法としての定式化 (一般的に)

$x \in \mathbb{R}^A$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP)} & \text{maximize} & (0,\dots,0,1)x \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A が完全ユニモジュラなので，この係数行列も完全ユニモジュラ

最大流問題の性質 (整数流定理)

容量 c が整数値関数である ⇒
各弧の上の流量が整数であるような最大流が存在する

整数流定理の帰結

$x \in \mathbb{R}^A$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{maximize} & (0,\dots,0,1)x \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z}^A \\
\text{(LP)} & \text{maximize} & (0,\dots,0,1)x \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}
\end{array}
$$

係数行列の完全ユニモジュラ性より

容量 c が整数値関数である ⇒
(P) の最適値 = (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (D) の最適値

最大流問題の双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{(LP)} & \text{maximize} & (0,\dots,0,1)x \\
& \text{subject to} & \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, x \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DLP)} & \text{minimize} & c^\top z \\
& \text{subject to} & A^\top y^1 - A^\top y^2 + z \ge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^1, y^2, z \ge 0
\end{array}
$$

変数は $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^V, z \in \mathbb{R}^A$

最大流問題の双対問題

変数は $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^V, z \in \mathbb{R}^A$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DLP)} & \text{minimize} & c^\top z \\
& \text{subject to} & A^\top y^1 - A^\top y^2 + z \ge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^1, y^2, z \ge 0
\end{array}
$$

$y = y^1 - y^2$ と置き直す

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DLP')} & \text{minimize} & c^\top z \\
& \text{subject to} & A^\top y + z \ge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \ge 0
\end{array}
$$

最大流問題の双対問題に整数制約を加える

$$\begin{array}{llll} \text{(DLP')} & \text{minimize} & c^\top z & \\ & \text{subject to} & A^\top y + z \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & z \geq 0 \\ \text{(D')} & \text{minimize} & c^\top z & \\ & \text{subject to} & A^\top y + z \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & z \geq 0, y \in \mathbb{Z}^V, z \in \mathbb{Z}^A \end{array}$$

最大流問題：ここまでのまとめ

考えていた問題

- (LP)：最大流問題
- (DLP)：(LP) の双対問題
- (DLP')：(DLP) を書き直した問題
- (D')：(DLP') に整数制約を加えた問題

帰結：(LP) の係数行列が完全ユニモジュラであるので

- 容量が整数値関数であるとき，(LP) の最適値 $=$ (D') の最適値

つまり，最大流の値 $=$ ある組合せ最適化問題の最適値

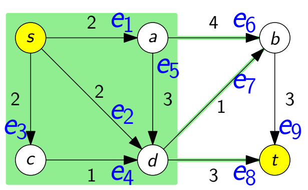
疑問

「ある組合せ最適化問題」とは何か？

カット

s,t カットとは？

s,t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \not\in S$ を満たすもののこと



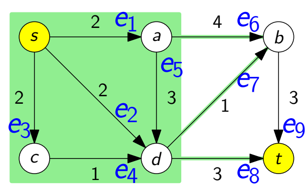
イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

s,t カットの容量とは？

s,t カット S の容量とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v) \in A, u \in S, v \not\in S} c((u,v))$$



S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

(D') をよく見てみる (1)

$$\begin{array}{llll} \text{(D')} & \text{minimize} & c^\top z & \\ & \text{subject to} & A^\top y + z \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & z \geq 0, y \in \mathbb{Z}^V, z \in \mathbb{Z}^A \end{array}$$

これは最小化問題

- $(y^*, z^*) \in \mathbb{Z}^V \times \mathbb{Z}^A$ を (D') の最適解 (の 1 つ) とする
- $c((t,s)) = +\infty$ なので，$z^*_{(t,s)} = 0$
- 不等式制約における弧 (t,s) に対応する行を見ると

$$-y^*_t + y^*_s + z^*_{(t,s)} \geq 1$$

- $\therefore y^*_s \geq 1 + y^*_t$
- ここで，$S = \{v \in V \mid y^*_v \geq y^*_s\}$ とする (注：$s \in S, t \not\in S$)

(D') をよく見てみる (2)

$$\begin{array}{llll} \text{(D')} & \text{minimize} & c^\top z & \\ & \text{subject to} & A^\top y + z \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & z \geq 0, y \in \mathbb{Z}^V, z \in \mathbb{Z}^A \end{array}$$

$S = \{v \in V \mid y^*_v \geq y^*_s\}$ とする

- 弧 (u,v) が $u \in S, v \not\in S$ を満たすとき，$y^*_u \geq y^*_s$
- また，$y^*_v < y^*_s$ なので，$y^* \in \mathbb{Z}^V$ より，$y^*_v \leq y^*_s - 1$
- したがって，不等式制約における弧 (u,v) に対応する行を見ると

$$\begin{array}{rcl} -y^*_u + y^*_v + z^*_{(u,v)} & \geq & 0 \\ \therefore \quad -y^*_s + y^*_s - 1 + z^*_{(u,v)} & \geq & 0 \\ \therefore \quad z^*_{(u,v)} & \geq & 1 \end{array}$$

(D') をよく見てみる (3)

$$\begin{array}{llll} \text{(D')} & \text{minimize} & c^\top z & \\ & \text{subject to} & A^\top y + z \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & z \geq 0, y \in \mathbb{Z}^V, z \in \mathbb{Z}^A \end{array}$$

$S = \{v \in V \mid y^*_v \geq y^*_s\}$ とする

- したがって，

$$\text{(D') の最適値} = c^\top z^* \geq \sum_{(u,v) \in A, u \in S, v \not\in S} c((u,v))$$

- この右辺は s,t カット S の容量と等しい

最大流と最小 s,t カットの関係

- つまり，

$$\begin{array}{rl} \text{最大流の値} & = \text{(LP) の最適値} \\ & = \text{(D') の最適値} \geq \text{ある } s,t \text{ カットの容量} \end{array}$$

- その一方で，任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して (演習問題)

$$f \text{ の値 } \mathtt{val}(f) \leq S \text{ の容量 } \mathrm{cap}(S)$$

- したがって，

$$\text{最大流の値} = \text{ある } s,t \text{ カットの容量}$$

(この s,t カットは最小容量の s,t カット)

最大流最小カット定理

容量が整数値関数であるとき，
最大流の値は s,t カットの最小容量に等しい

目次

1. 前回までの復習
2. 二部グラフにおける最大マッチング問題
3. 最大流問題
4. 今日のまとめ

今日の目標

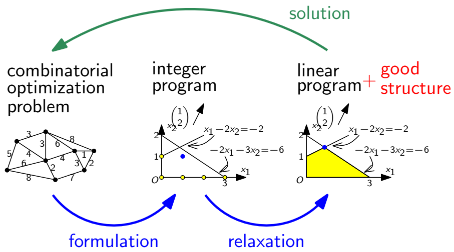
今日の目標

今までの講義内容を用いて以下の問題に取り組む

- 二部グラフにおける最大マッチング問題
  - Kőnig–Egerváry の定理
- 最大流問題
  - 整数流定理
  - 最大流最小カット定理

これらの定理は組合せ最適化における基本的な定理であり，
この講義では線形計画法の立場から証明を行った

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ

次回と次々回の予告

次回と次々回の予告

係数行列が完全ユニモジュラでないけれども，
制約に現れる不等式系が完全双対整数性を持つ場合を扱う

- 最小全域木問題 (次回)
- 最大マッチング問題 (次々回)